

《线性代数》模拟试卷（六）答案

一、判断题（下列命题正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

1. 一个行列式与它的转置行列式相等。 (√)
2. 初等变换不改变矩阵的秩。 (√)
3. 齐次线性方程组必有非零解。 (×)
4. 单独一个非零向量线性相关。 (×)
5. 非零向量与自身的内积大于零。 (√)

二、选择题（从A、B、C、D中选出一个正确答案，每小题4分，共20分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & a \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ 中，元素 a 的余子式是 (D)

A. $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$ B. $-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ C. $-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$ D. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

2. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ 的秩是 (B)

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 必须满足 (A)

A. $k = 2$ 或 $k = -2$ B. $k \neq 2$ 且 $k \neq -2$ C. $k = 2$ D. $k = -2$

4. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A| \neq 0$ ，则有 (C)

- A. A 的列向量线性相关 B. A 的行秩为 0
- C. A 的列向量线性无关 D. A 的行向量线性相关
5. 设 A 为 n 阶矩阵, 则有 (D)
- A. A 的特征值为 n B. A 的特征值不为 n
- C. A 的特征向量为零 D. A 的特征向量不为零

三、填空题 (请用正确答案填空, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ 中, 余子式 $M_{21} = 6$, 则 $x = \underline{2}$ 。
2. 矩阵 $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ 可逆, 则 x 必满足 $\underline{x \neq -2}$ 且 $\underline{x \neq 2}$ 。
3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系是 $\underline{(3,1)}$ 。
4. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (2, 2, 0)$ 的秩为 $\underline{2}$ 。
5. 正交向量组 $\alpha_1 = (1, -1), \alpha_2 = (2, 2)$ 单位化为 $\underline{\beta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, -1), \beta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1)}$ 。

四、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 。

$$\text{解: } D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 \times (1) \times (1) \times (1) = 5 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\text{解: } (A, I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

3. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (1, 3, 3),$
 $\alpha_4 = (4, -2, 5)$ 的一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解: 对矩阵 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$ 作行初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

所以 α_1, α_2 为一个极大无关组, 且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解: A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时, 方程组 $(\lambda_1 I - A)X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, 所以 A 对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的全部特征向量为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2 \text{ 为不全为 } 0 \text{ 的常数} \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

当 $\lambda_3 = -2$ 时, 方程组 $(\lambda_3 I - A)X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$, 所以 A 对应于特征值 $\lambda_3 = -2$ 的全部特征向量为

$$k_3\alpha_3, k_3 \text{ 为不为 } 0 \text{ 的常数} \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关。

证明: 设 $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$

则 $(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ (3 分)

因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

所以 $k_1 + k_2 + k_3 = k_2 + k_3 = k_3 = 0$

所以只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关 (5 分)

2. 设 P, Q 都是正交矩阵, 证明它们的乘积 PQ 仍是正交矩阵。

证明: 因为 P, Q 都是正交矩阵

所以 $P^T P = I, Q^T Q = I$ (2 分)

利用上式得

$$(PQ)^T (PQ) = Q^T (P^T P) Q = Q^T I Q = Q^T Q = I$$

所以 PQ 仍是正交矩阵 (5 分)