

第3章 多维随机变量及其分布

(A)

一、填空题

1. 如果 (X, Y) 是二维随机离散型变量, 则 (X, Y) 的分布律定义为 $p_{ij} =$ _____; 分布律的性质 $\sum_i \sum_j p_{ij} =$ _____.

2. 若已知 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots)$, 则随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘分布为 _____; X, Y 相互独立的充要条件是 _____.

3. 设随机变量 X 和 Y 独立, 其分布律分别为

X	0	$\pi/2$		Y	0	$\pi/2$
p_i	0.5	0.5	与	p_j	0.5	0.5

$U = \sin X, V = \cos Y$, 则 $P\{U = V\} =$ _____.

4. (X, Y) 是二维连续型随机变量, $f(x, y)$ 是 (X, Y) 的概率密度, 则 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) =$ _____; $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy =$ _____;

5. 设 $f(x, y)$ 是二维连续型随机变量的概率密度, 则关于 X 与 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x) =$ _____; $f_Y(y) =$ _____; X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 _____;

6. 二维随机变量 (X, Y) 在 G 上服从二维均匀分布 (G 是平面上一个有界区域, 其面积为 A), 则概率密度 $f(x, y) =$ _____.

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

则 $c =$ _____; (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y) =$ _____.

8. 设平面区域 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y = 0, x = 1, x = e^2$ 所围成, 二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x = 2$ 处的值为 _____.

9. 设 X, Y 为两个随机变量且

$$P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}, P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$$

则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} =$ _____.

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $P\{X + Y \leq 1\} =$ _____ .

11. 随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $(0, 3)$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} =$ _____ .

二、单项选择题

1. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从 0-1 分布:

$$P\{X = 0\} = P\{Y = 0\} = \frac{2}{3}, P\{X = 1\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{3}$$

则 $P\{X = Y\}$ 等于 ().

- (A) 0 (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) 1

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 1)$, 则 ().

- (A) $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ (B) $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$
(C) $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ (D) $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 () 服从区间或区域上的均匀分布.

- (A) (X, Y) (B) $X + Y$ (C) X^2 (D) $X - Y$

4. 如果两独立随机变量 X 与 Y 之和 $X + Y$ 与 X 和 Y 服从同一名称概率分布, 则和都服从 ().

- (A) 均匀分布 (B) 二项分布 (C) Poisson 分布 (D) 指数分布

5. 设随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 而 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 相应为 X 和 Y 的分布

函数, 则对任意 a, b , 概率 $P\{X > a, Y > b\} =$ ().

- (A) $1 - F(a, b)$ (B) $F(a, b) + 1 - [F_1(a) + F_2(b)]$
(C) $1 - F_1(a) + F_2(b)$ (D) $F(a, b) - 1 + [F_1(a) + F_2(b)]$

6. 设随机变量 X 与 Y 不独立, 则其联合概率密度 $f(x, y) =$ ().

- (A) $\begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ (B) $\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$
(C) $\begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < 1, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

7. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 且 X 的分布律如下表所示

X	0	1
p	1/2	1/2

则随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的分布律为 () 所示 .

(A)

X	0	1
p_i	1/2	1/2

(B)

Z	0	1
p_i	1/2	1/2

(C)

Z	0	1	2
p_i	1/4	1/4	1/2

(D)

Z	0	1
p_i	1/4	3/4

8. 设随机变量 (X, Y) 服从正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ().

- (A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)f_Y(y)$ (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

9. 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ().

- (A) $F^2(x)$ (B) $F(x)F(y)$
(C) $1 - [1 - F(x)]^2$ (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

三、解答题

1. 设口袋中有 3 个球, 它们上面依次标有数字 1, 1, 2, 现从口袋中无放回地连续摸出两个球, 以 X, Y 分别表示第一次与第二次摸出的球上标有的数字, 求 (X, Y) 的分布律.

2. 设盒中装有 8 支圆珠笔芯, 其中 3 支是蓝的, 3 支是绿的, 2 支是红的, 现从中随机抽取 2 支, 以 X, Y 分别表示抽取的蓝色与红色笔芯数, 试求:

- (1) X 和 Y 的联合分布律;
(2) $P\{X, Y \in A\}$, 其中 $A = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$.

3. 设事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{4}, P(A|B) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{1}{2}$, 记 X, Y 分别为一次试验中 A, B 发生的次数, 即 $X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}$, 求: 二维随机变量 (X, Y) 的分布律.

4. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试求：

- (1) 常数 A
- (2) $P\{X = Y\}$
- (3) $P\{X < Y\}$
- (4) (X, Y) 的分布函数。

5. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $P\{X + Y \geq 1\}$ 。

6. 将一枚硬币掷 3 次，以 X 表示前 2 次中出现正面的次数，以 Y 表示 3 次中出现正面的次数，求 X, Y 的联合分布律及 (X, Y) 的边缘分布律。

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 。

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：

- (1) 确定常数 c
- (2) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 。

9. 设平面区域 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y = 0, x = 1, x = e^2$ 围成，二维随机变量 (X, Y) 在

区域 D 上服从均匀分布，求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 。

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

试求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 。

11. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 。

12. 已知随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在给定 $Y=y$ 条件下, 随机变量 X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y < 1; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求概率 $P\{X > 0.5\}$.

13. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.05	0.15	0.2
1	0.07	0.11	0.22
2	0.04	0.07	0.09

试分别求 $Z = \max(X, Y)$ 和 $W = \min(X, Y)$ 的分布律.

14. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, 且 $X \sim E(\theta), Y \sim E(\theta)$, 如果定义随机变量 Z 如下:

$$Z = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

求 Z 的分布律.

15. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$; 并问 X 与 Y 是否独立?

16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 试在以下情况下求 $Z = X + Y$ 的概率密度,

(1) $X \sim U(0, 1), Y \sim U(0, 1)$;

(2) $X \sim U(0, 1), Y \sim E(1)$.

17. 设 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 1)$, 且 X 与 Y 独立, 求 $P\{X + Y \leq 1\}$.

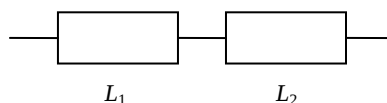
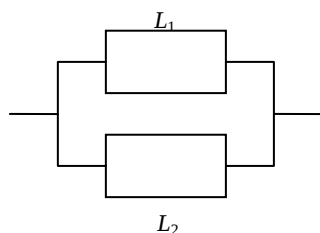
18. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

19. 设某系统 L 由两个相互独立的系统 L_1, L_2 联合而成, 各连接方式如图所示. 已知 L_1, L_2 的使用寿命 X 与 Y 分别服从参数为 α, β 的指数分布, 求以下各系统 L 使用寿命 Z 的分布函数及概率密度.



(B)

1. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 求 a, b 的值.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X > 2Y\}$

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 求

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F(-\frac{1}{2}, 4)$.

4. 设 (X, Y) 为二维离散型随机变量, X 和 Y 的边缘分布律分别如下:

X	-1	0	1
p_i	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
p_i	1/2	1/2

如果 $P\{XY=0\}=1$, 试求

(1) (X, Y) 的分布律;

(2) 问 X 与 Y 是否独立.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim U(-\pi, \pi)$, 求 $Z = X + Y$ 的概率密

度(计算结果用标准正态分布分布函数 $\Phi(x)$ 表示).

6. 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 试求

边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f_S(s)$.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其中 X 的分布律为

X	1	2
p_i	0.3	0.7

而 Y 的概率密度为 $f(y)$, 求随机变量 $U = X + Y$ 的概率密度 $g(u)$.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

求: (1) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(2) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

9. 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 上服从均匀分布, 求:

(1) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(2) Y 的概率密度;

(3) 概率 $P\{X + Y > 1\}$.

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的分布律为 $P\{X = i\} = \frac{1}{3}, (i = -1, 0, 1)$, Y 的

概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 记 $Z = X + Y$, 求:

(1) 求 $P\{Z \leq \frac{1}{2} | X = 0\}$

(2) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

11. 设 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试求 $Z = X - Y$ 的概率密度.

12. 设 X 与 Y 独立同分布, 且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 试求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的分布.