

《线性代数》模拟试卷（二十一）答案

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

- (×) 1. 对于任意的两个矩阵 A, B ，一定有 $AB = BA$ 。
- (√) 2. 初等矩阵都是可逆的。
- (√) 3. 若行列式某两列元素对应成比例，则行列式为零。
- (√) 4. 任何一个向量组的秩一定不超过其中向量的维数。
- (×) 5. 非齐次线性方程组一定有解。

二、填空题（每小空3分，共15分）

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB - BA =$ _____.

答案: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. 向量 $\alpha = (2, -1, 1)^T$ 由向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$ 线性表示的表示式为_____.

答案: $\alpha = 7\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$

3. 若 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ _____.

答案: 1

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 秩为_____.

答案: 3

5. 设 2 为可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}$ 的特征值之一是_____.

答案: $\frac{3}{4}$

三、单项选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 中代数余子式 $A_{12} = -1$, 则 $A_{23} = ()$.

A. -2 B. 1 C. -1 D. 2

答案: B

2. 设 A 为 n 阶方阵, $B = -A$, 则必有 ().

A. $|B| = -|A|$ B. $|B| = |A|$ C. $|B| = (-1)^{2n}|A|$ D. $|B| = (-1)^n|A|$

答案: D

3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 k 必须满足 ().

A. $k = 1$ 或 $k = -1$ B. $k \neq 1$ 且 $k \neq -1$ C. $k = 1$ D. $k = -1$

答案: B

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ().

A. $P_1 A P_2 = B$ B. $A P_2 P_1 = B$ C. $P_2 P_1 A = B$ D. $P_1 P_2 A = B$

答案: D

5. 四元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系是 ().

A. $(0,0,0,0)^T$

B. $(0,0,2,0)^T$

C. $(1,0,-1,0)^T$

D. $(0,0,2,0)^T$ 和 $(0,0,0,1)^T$

答案: B

6. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 6, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a, -2)^T$ 线性相关, 则 a 应满足条件 (). A. $a = 2$ B. $a \neq 2$ C. $a = -2$ D. $a \neq -2$

答案: C

7. 设 ξ_1, ξ_2 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的解, 则 ().

A. $\xi_1 + \xi_2$ 为 $Ax = 0$ 的解

B. $\eta_1 - \eta_2$ 为 $Ax = \beta$ 的解

C. $\eta_1 + \eta_2$ 为 $Ax = \beta$ 的解

D. $2\xi_1 + \eta_1$ 为 $Ax = 0$ 的解

答案: A

8. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $|A| = 0$ 的充分必要条件为 ().

A. $r(A) = n$

B. A 的某两行对应元素成比例

C. A 的列向量组线性相关

D. A 的某个列向量可由其余列向量线性表示

答案: D

四、计算题 (共 6 小题, 共 51 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

解: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$ (4 分)

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -(-18+14) = 4 \quad (7 \text{ 分})$$

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, 求 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44}$ 的值. (8 分)

解: $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -27 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 63 \quad (7 \text{ 分})$$

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7 分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 则 A 可逆. (2 分)

$$\text{构造矩阵 } (A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

4. 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. (7 分)

解: 构造矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -5 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -5 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 2 & -5 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & -1 & 0 & | & 14 \\ 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -14 \\ 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

则 $X = \begin{pmatrix} 9 \\ -14 \\ -6 \end{pmatrix}$

5. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解. (12 分)

解：对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换，得

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

由于 $R(A) = R(\tilde{A}) = 3 < 4$, 所以该方程组有无穷多解, 取 x_4 为自由变量,

则方程组 $\begin{cases} x_1 = 3 + 3x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = -1 - x_4 \end{cases}$ 与原方程组等价 (6 分)

令 $x_4 = 0$, 则原方程组的一个特解为 $\eta = (3, 0, -1, 0)^T$. (7 分)

方程组 $\begin{cases} x_1 = 3x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$ 与导出组等价

令 $x_4 = 1$, 则导出组的基础解系为

$$\xi = (3, -1, -1, 1)^T \quad (11 \text{ 分})$$

因此, 原方程组的通解为 $x = \eta + k\xi$, k_1, k_2 为任意常数. (12 分)

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

解: A 的特征多项式为 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(2 + \lambda)$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ (4 分)

当 $\lambda_1 = 4$ 时, 解方程 $(A - 4E)x = O$. 由

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (7 分)

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解方程 $(A + 2E)x = O$. 由

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, -5)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$). (10 分)