

《线性代数》第四章 向量组的线性相关性 测试试卷(三)

姓名_____学号_____得分_____

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，已知齐次线性方程组 $AX=O$ 只有零解，则下列结论正确的是（ ）

A. $R(A)=n$ B. $m \geq n$ C. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 必有唯一解 D. $R(A)=m$

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均为同维向量，且 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性相关， $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关，则下列结论一定成立的是（ ）

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
C. α_1 可以由 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性表示 D. β 可以由 α_1, α_2 线性表示

3. 设三维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性无关的是（ ）

A. 8 B. 2 C. 4 D. 1

4. 设有向量组 $\alpha_1 = (1, -2, 2, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T$,

$\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)^T$, 则该向量组的最大无关组是（ ）

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$

5. 已知三维线性空间的一组基底为 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$,

$\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$, 则 $\mu = (2, 0, 0)^T$ 在上述基底下的坐标是（ ）

A. $(1, 1, 1)^T$ B. $(1, 1, -1)^T$ C. $(2, 0, 0)^T$ D. $(1, -1, -1)^T$

6. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵， $R(A)=m$ ，且齐次线性方程组 $AX=O$ 只有零解， $\bar{A}$ 表示该方程组的增广矩阵，则下列说法不正确的是（ ）

A. $m=n$ B. $R(\bar{A})=R(A)$

C. $\bar{A}$ 的行向量组线性无关

D. $\bar{A}$ 的列向量组线性无关

7. 已知向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组中含有 r 个向量, 下述判断错误的一项是 ()

A. $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量线性无关

B. $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都是其极大无关组

C. 当 $k > r$ 时, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意 k 个向量线性相关

D. $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个向量线性无关

8. 设三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 Ab, b 线性相关, 则 $x = ()$

A. -1

B. 2

C. $\frac{5}{4}$

D. $\pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

9. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则 ()

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关

B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关

D. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关

10. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 k 满足 ()

A. $k \neq \frac{3}{5}$

B. $k \neq \frac{2}{5}$

C. $k = \frac{3}{5}$

D. $k = \frac{2}{5}$

11. 设非空集合, $V_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$,

$V_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$, 下列结论正确的是()

A. V_1, V_2 都是向量空间 B. V_2 是向量空间, V_1 不是向量空间

C. V_1 是向量空间, V_2 不是向量空间 D. V_1, V_2 都不是向量空间

12. 设 ξ_1, ξ_2 为齐次线性方程组 $Ax=O$ 的解, η_1, η_2 为齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解, 则()

A. $\eta_1 + \eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解 B. $2\xi_1 + \eta_1$ 为 $Ax=O$ 的解

C. $\eta_1 - \eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解 D. $\xi_1 + \xi_2$ 为 $Ax=O$ 的解

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)^T$ 的最大线性无关组是_____.

2. 设 A 是 3×4 矩阵, 若矩阵 A 的秩为 2, 则矩阵 $3A^T$ 的秩为_____.

3. 向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 3)^T$ 的线性相关性为_____.

4. 设向量组 $\alpha_1 = (0, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 3)^T$, 则 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 中系数 k_1, k_2 的取值为_____.

5. 当 $\lambda =$ _____ 时, 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$
 有唯一解.

6. 设 η_1, η_2, η_3 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个互不相同的解, $R(A)=3$, 若 $\eta_1 + \eta_3 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 则该方程组的通解为_____.

三、简答题 (共 40 分)

1. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, -1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (2, 3, 1, 1)^T$, $\alpha_4 = (-1, 3, 1, 7)^T$, $\alpha_5 = (-1, -1, 2, -2)^T$, 求向量空间 $V = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 + k_5\alpha_5 \mid k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \in R\}$ 的基与维数 (10 分)

2. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 1, -1, 3)^T$, $\alpha_3 = (5, -2, 8, -9)^T$, $\alpha_4 = (3, 2, 1, -1)^T$, $\alpha_5 = (-1, -1, 2, -2)^T$ 的秩和一个最大线性无关组, 并将其余向量用该最大线性无关组线性表示. (10 分)

3. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$$
 的通解. (10 分)

4. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求方程 $Ax = \beta$ 的通解. (10 分)