

《概率论与数理统计》模拟试卷 11 参考答案

一、判断题.

1. 若事件 A, B 满足 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 是互斥事件. ($\checkmark$)
2. 概率为 0 的事件, 一定是不可能事件. ($\times$)
3. 无记忆性是泊松分布的特征. ($\times$)
4. 二维随机变量的联合分布函数可以确定边缘分布函数. ($\checkmark$)
5. 对于任意的 X 和 Y , 都有 $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$. ($\times$)
6. 二项分布的极限分布是正态分布. ($\checkmark$)
7. 估计量是用于估计未知参数的样本的函数. ($\checkmark$)

二、选择题.

1. 设 A 与 B 互斥, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则下列结论正确的是 (B).
A. $P(A|B) = P(A)$ B. $P(A|B) = 0$
C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P(B|A) > 0$
2. 在第六次全国人口普查中, 调查总体是 (D).
A. 每一个人 B. 每一户 C. 每个省 D. 全国人口
3. 设 $X \sim N(1, 9)$, 要使 $P(X \leq C) = \Phi(0)$, 则 $C =$ (A).
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 已知 $X \sim N(0, 1)$, 则 $Y = X^2$ 的数学期望为 (C).
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 设 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$ 和联合概率密度函数 $f(x, y)$, 下列选项中正确的是 (B).
A. $P\{X = x, Y = y\} = F(x, y)$ B. $0 \leq F(x, y) \leq 1$
C. $P\{X = x, Y = y\} = f(x, y)$ D. $0 \leq f(x, y) \leq 1$
答案: B
6. 若 X 的期望 $E(X) \geq 0$, 且 $E(\frac{1}{2}X^2 - 1) = 2$, $\text{Var}(\frac{1}{2}X - 1) = \frac{1}{2}$, 则 $E(X) =$ (C).
A. 0 B. 1 C. 2 D. $2\sqrt{2}$
7. 在假设检验中, 显著性水平 α 是 (A).
A. $P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真})$ B. $P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为真})$
C. $P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为假})$ D. $P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为假})$

三、填空题.

1. 设 $g(x) = \lambda e^{-3x}, x \geq 0$ 是概率密度, 则常数 $\lambda = \underline{3}$.
2. 设 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的泊松分布, 且已知 $E[(X-1)(X-2)] = 10$, 则 $\lambda = \underline{4}$.
3. 设随机变量 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $\text{Var}(X) = \sigma^2$, 根据切比雪夫不等式估计

$$P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \frac{1}{9} \text{ 或 } (0.111).$$

4. 估计量的优良性包括无偏性、有效性和相合性 (或一致性).
5. 假设检验的方法是依据 小概率事件 原理.

四、计算题.

1. 设总体 $X \sim E(\lambda)$, 即: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (x \geq 0), \\ 0 & x < 0 \end{cases}, (\lambda > 0), (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自 X 的一个样本观测值, 且 $x_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, 求 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}$?

解: 似然函数:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i)}$$

似然取对数函数:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

对数似然函数求导并令导数为零, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n \ln \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right] = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = 0, \\ \therefore \hat{\lambda} &= \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)} = \frac{1}{\bar{x}} \end{aligned}$$

2. 设随机变量 X 的概率密度为: $f(x) = A e^{-|x|}, (-\infty < x < +\infty)$,

试求: (1) 系数 A ; (2) $P(0 < X < 1)$; (3) X 的分布函数 $F(x)$.

$$\text{解: (1) } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2A \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, (-\infty < x < +\infty),$$

$$(2) P(0 < X < 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0.316$$

$$(3) F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-|x|} dx$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{1}{2} e^x$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } F(x) = \frac{1}{2} (\int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^x e^{-x} dx) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$\text{因此, 分布函数 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & (x < 0) \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

3. 已知服用一定剂量的某种安眠药, 平均睡眠时间为 20.8 小时, 服用新研制的安眠药, 据说能平均增加 3 小时。现测得 9 例服用新药的平均睡眠时间为 $\bar{x} = 24.2$ 小时, 方差 $s^2 = (2.296)^2$, 假定睡眠时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 是否可以认为新安眠药的平均睡眠时间为 23.8 小时? ($\alpha = 0.01$) ($t_{0.005}(8) = 3.355$, $t_{0.025}(8) = 2.306$; $t_{0.05}(8) = 1.859$)

解: (1) 待检假设为: $H_0: \mu = \mu_0 (\mu_0 = 23.8) \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 (\mu_0 \neq 23.8)$

(2) 已知: $n = 9$, $\bar{x} = 24.2$, $s = 2.296$,

$$\therefore |T| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| = \left| \frac{24.2 - 23.8}{2.296} \times 3 \right| = 0.523$$

(3) $\alpha = 0.01$, $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.005}(8) = 3.355$

(4) 由于 $|T| = 0.523 > \lambda_{\alpha} = 3.355$ 不成立, 所以, 接受 H_0 , 即可以认为新安眠药的平均睡眠时间为 23.8 小时。

4. 已知灌装机灌装的饮料每杯分配量 $X \sim N(\mu, 15^2)$, 今有 36 杯饮料平均容量 $\bar{x} = 225$ (ml), 求 μ 的置信度为 99% 的置信区间? ($u_{0.005} = 2.58$; $u_{0.025} = 1.96$; $u_{0.05} = 1.65$)

解: 已知: $n = 36$, $\bar{x} = 225$, $\sigma_0^2 = (15)^2$

$$1 - \alpha = 0.99, \alpha = 0.01; \lambda_{\alpha} = u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.005} = 2.58$$

置信下限:

$$\underline{\theta} = \bar{x} - \lambda_{\alpha} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 225 - 2.58 \times \frac{15}{\sqrt{36}} = 225 - 6.45 = 218.55$$

置信上限:

$$\underline{\theta} = \bar{x} + \lambda_{\alpha} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 225 + 2.58 \times \frac{15}{\sqrt{36}} = 225 + 6.45 = 231.45$$

即 μ 的置信水平为 99% 的置信区间为 [218.55, 231.45].

5. 某地区 1996 年—2000 年居民消费支出和收入金额资料如下:

收入 x (亿元)	64	70	77	82	92
消费支出 y (亿元)	56	60	66	75	88

建立该地区消费支出 y 对收入 x 的直线回归方程?

解：回归方程： $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	64	56	4096	3136	3584
	70	60	4900	3600	4200
	77	66	5929	4356	5082
	82	75	6724	5625	6150
	92	88	8464	7744	8096
Σ	385	345	30113	24461	27112
$\frac{1}{n}\Sigma$	77	69			

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 385 \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 345 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 30113 \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 24461 \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 27112$$

回归方程： $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{5 \times 27112 - 385 \times 345}{5 \times 30113 - (385)^2} = 1.1688$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 69 - 1.1688 \times 77 = -20.9976$$

回归方程为： $y = -20.9976 + 1.1688x$.