

《线性代数》第四章 向量组的线性相关性

测试试卷(五)

姓名_____学号_____得分_____

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 设 A 是 n 阶矩阵, $R(A)=r < n$, 那么在 A 中()
A. 任意 r 个行(列)向量都构成最大无关组 B. 任意 $r-1$ 阶子式都等于零
C. 任意 r 个行(列)都线性无关 D. 必有 r 个行(列)都线性无关
2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充要条件是()
A. A 的列向量组线性无关 B. A 的列向量组线性相关
C. A 的行向量组线性无关 D. A 的行向量组线性相关
3. 若 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 满足 $R(A)=R(A,b)=n$, 则该方程组()
A. 有无穷多个解 B. 有唯一解 C. 无解 D. 解的情况不确定
4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 以下命题中成立的是()
A. α_1 一定能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示 B. α_2 一定能由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示
C. α_3 一定能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示 D. α_4 一定能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示
5. 已知 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 那么向量组 $a\alpha_1 + b\alpha_2, a\alpha_2 + b\alpha_3, a\alpha_3 + b\alpha_1$ 线性无关的充要条件为()
A. $a \neq 0, b=0$ B. $a \neq b$ C. $a \neq -b$ D. $a=b \neq 0$
6. 已知对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 做初等行变换可得 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的最大无关组不可能为()
A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ D. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$
7. 向量组 $\beta=(0, 2)^T$ 在基 $\alpha_1=(1, 2)^T, \alpha_2=(3, 4)^T$ 下的坐标为()

- A. $(-1, 3)^T$ B. $(1, -3)^T$ C. $(3, -1)^T$ D. $(3, 1)^T$

8. 通解为 $\mathbf{x} = (1, 9, 9, 8)^T + c_1(-1, 1, 1, 1)^T + c_3(1, 0, 0, 1)^T$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ 的非齐次线性方程组为()

A. $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 11 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x_2 - 2x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 11 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 11 \end{cases}$

9. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, k, 2)^T$ 的秩为 2, 则()

- A. $k = 2$ B. $k = 0$ C. $k = 1$ D. $k = -2$

10. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ (k-1)(k-2)x_3 = (k-3)(k-4) \end{cases}$ 无解, 则 k 的取值为 ()

- A. 5 B. 2 C. 4 D. 3

11. 给定非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个不同解为 ξ 与 η , 则以下说法正确的是 ()

- A. $\xi - \eta$ 必是非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解
B. $\xi - \eta$ 必是齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解
C. $\xi + \eta$ 必是非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解
D. $\xi + \eta$ 必是齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解

12. β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应导出组的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解为()

- A. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ B. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
C. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ D. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 若任一 3 维向量都可由向量组 $\alpha_1 = (a, 3, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 3)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, 1)^T$ 线性表示, 则 a 不能取值_____.
2. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)^T$, 则该向量组的最大线性无关组为_____.
3. 设 $\alpha_1 = (1+t, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1+t, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1+t)^T$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 t 满足的条件为_____.
4. 当 $\lambda =$ _____ 时, 线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$
 有无穷多解.
5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 Ab, b 线性相关, 则 $x =$ _____.
6. 如果线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)x_3 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{cases}$$
 无解, 则 $\lambda =$ _____.

三、简答题（共 40 分）

1. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: $\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 3\alpha_3$ 也线性无关. (10 分)
2. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (1, -2, 4, 4)^T$,

$\alpha_4 = (2, -1, 4, 2)^T$, $\alpha_5 = (2, -1, 6, 2)^T$, 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个最大线性无关组, 秩, 并将其余向量用最大线性无关组线性表示. (10 分)

3. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$
 的通解. (10 分)

4. 设四元非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, 已知它的 3 个解向量为 η_1, η_2, η_3 , 其中 $\eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$, 求该方程组的通解. (10 分)