

第一节 随机变量

一、随机变量的引入

二、随机变量的概念

三、小结

一、随机变量的引入

1. 为什么引入随机变量？

概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，为了更方便有力的研究随机现象，就要用数学分析的方法来研究，就需将任意的随机事件数量化. 当把一些非数量表示的随机事件用数字来表示时，就建立起了随机变量的概念.

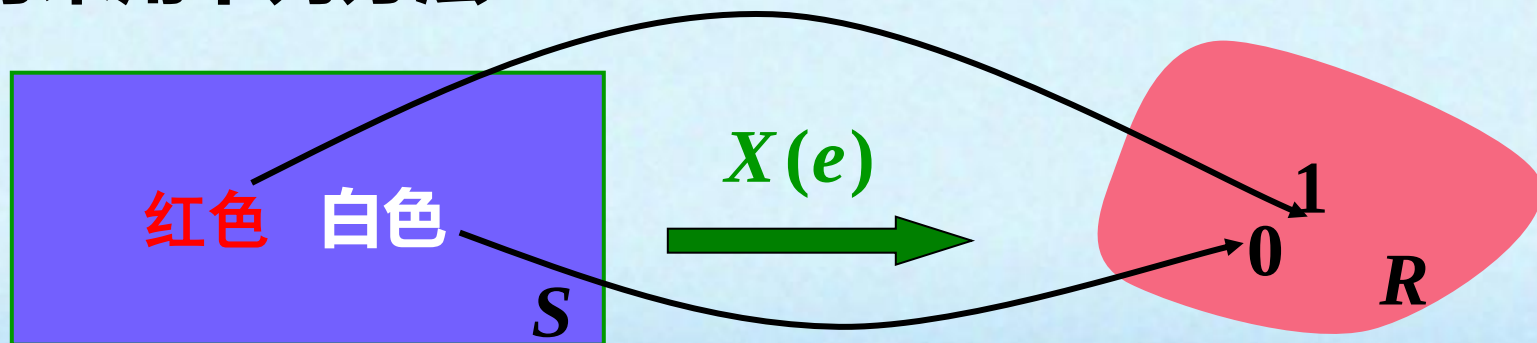
2. 随机变量的引入

例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球，观察摸出球的颜色。

$S = \{\text{红色、白色}\}$ $\xrightarrow{?}$ 将 S 数量化

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{非数量}}$

可采用下列方法



即有 $X(\text{红色})=1$, $X(\text{白色})=0$.

$$X(e) = \begin{cases} 1, & e = \text{红色}, \\ 0, & e = \text{白色}. \end{cases}$$

这样便将非数量的 $S=\{\text{红色}, \text{白色}\}$ 数量化了.



例2 抛掷骰子，观察出现的点数.



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

样本点本身就是数量

$$X(e) = e$$



恒等变换

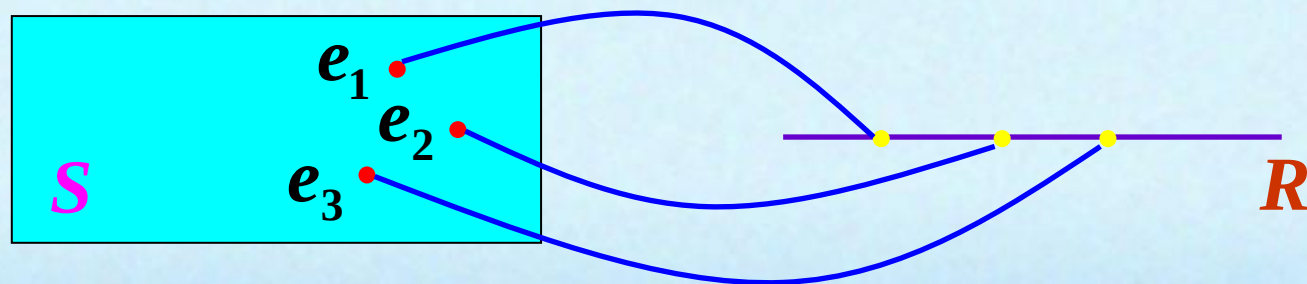
$$X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3, X(4) = 4, X(5) = 5, \\ X(6) = 6, \text{ 且有 } P\{X = i\} = \frac{1}{6}, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$



二、随机变量的概念

定义 设随机试验的样本空间 $S = \{e\}$. $X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的单值实值函数. 称 $X = X(e)$ 为随机变量.

下图画出了样本点 e 与实数 $X = X(e)$ 对应的示意图.



说明

(1) 随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数, 但它与普通的函数有着本质的差别, 普通函数是定义在实数轴上的, 而随机变量是定义在样本空间上的(样本空间的元素不一定是实数).

(2) 随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值, 由于试验的各个结果的出现具有一定的概率, 因此



随机变量的取值也有一定的概率规律.

(3)随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内.或者说:随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.



例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8，现该射手不断向目标射击，直到击中目标为止，则

**$X(e)$ = 所需射击次数，
是一个随机变量.**

且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

1, 2, 3,



例4 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，
如果某人到达该车站的时刻是随机的，则

$X(e)$ = 此人的等车时间，
是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值
为: $[0,5]$.



补充例题



三、小结

随机变量是定义在样本空间上的一种特殊的函数.

与普通的函数不同，随机变量的取值具有一定的概率规律.



第二节 离散型随机变量及其分布律

- 一、离散型随机变量的分布律
- 二、常见离散型随机变量的概率分布
- 三、小结

一、离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为

$$x_k (k = 1, 2, \cdots),$$

X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率, 为

$$P(X = x_k) = p_k \quad k = 1, 2, \cdots.$$

称此为离散型随机变量 X 的分布律.

说明: 由概率的定义, p_k 满足如下两个条件:

$$1^\circ \quad p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \cdots;$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$



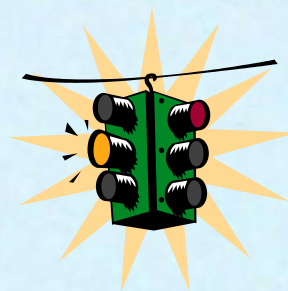
分布律也可以用表格的形式来表示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

表格直观地表示了随机变量 X 取各个值的概率的规律. X 取各个值各占一些概率, 这些概率合起来是1. 可以想象成: 概率1以一定的规律分布在各个可能值上.



例1 设一汽车在开往目的地的道路上需经过4组信号灯, 每组信号灯以 $1/2$ 的概率允许或禁止汽车通过. 以 X 表示汽车首次停下时, 它已通过的信号灯组数, 假设各组信号灯的工作是相互独立的, 求 X 分布律.



解 以 p 表示每组信号灯禁止汽车通过的概率.
易知 X 的分布律为



X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	$(1-p)^3 p$	$(1-p)^4$

或写成

$$P\{X = k\} = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$P\{X = 4\} = (1-p)^4.$$

以 $p = 1/2$ 代入得

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625



二、常见离散型随机变量的概率分布

(一) (0—1)分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值,其分布是

$$P\{X = k\} = p^k (1 - p)^{1-k}, \quad k = 0, 1 \quad (0 < p < 1),$$

则称 X 服从以 p 为参数的(0—1)分布或两点分布.

(0—1)分布的分布律也可写成

X	0	1
p_k	$1 - p$	p



实例 “抛硬币” 试验, 观察正、反两面情况.

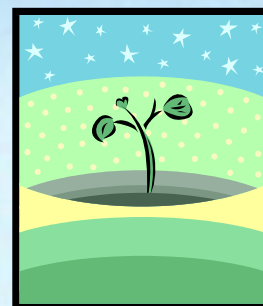
$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & \text{当 } e = \text{正面}, \\ 1, & \text{当 } e = \text{反面}. \end{cases}$$

随机变量 X 服从(0—1)分布.

其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$





对于一个随机试验, 如果它的样本空间只包含两个元素, 即 $S = \{e_1, e_2\}$, 我们总能在 S 上定义一个服从(0—1)分布的随机变量

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & \text{当 } e = e_1, \\ 1, & \text{当 } e = e_2. \end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果.

两点分布随机数演示



(二) 伯努利试验、二项分布

伯努利资料

设试验 E 只有两个可能结果： A 及 $\bar{A}$ ，则称 E 为**伯努利(Bernoulli)实验**. 设 $p(A) = p (0 < p < 1)$ ，此时 $P(\bar{A}) = 1 - p$. 将 E 独立重复进行 n 次，则称这一串重复独立的试验为 **n 重伯努利试验**.

n 重伯努利试验是一种非常重要的数学模型，它有广泛的应用，是研究最多的模型之一.

实例1 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛 n 次, 就是 n 重伯努利试验.

实例2 抛一颗骰子 n 次, 观察是否 “出现 1 点”, 就是 n 重伯努利试验.

二项概率公式

若 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 所有可能取的值为

$$0, 1, 2, \dots, n.$$



当 $X = k$ ($0 \leq k \leq n$) 时, 即 A 在 n 次试验中发生 k 次.

$$\underbrace{A A \cdots A}_{k \text{ 次}} \underbrace{\bar{A} \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k \text{ 次}},$$

$$\underbrace{A A \cdots A}_{k-1 \text{ 次}} \bar{A} \underbrace{\bar{A} \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k-1 \text{ 次}} \cdots \cdots$$

得 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 $\binom{n}{k}$ 种,

且两两互不相容.



因此 A 在 n 次试验中发生 k 次的概率为

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{\text{记 } q = 1-p} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

得 X 的分布律为

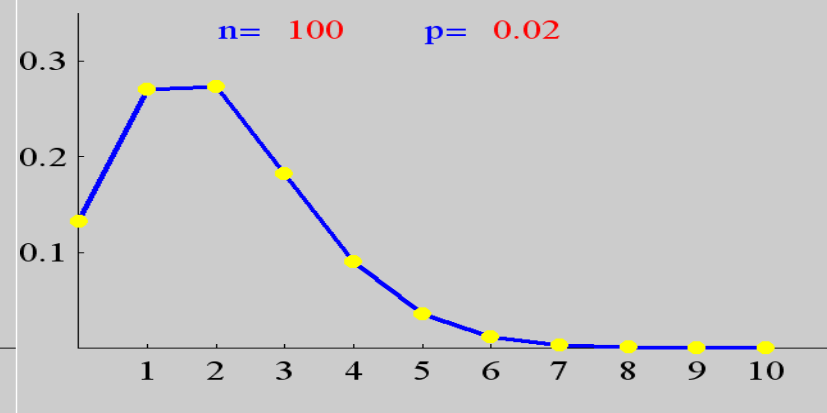
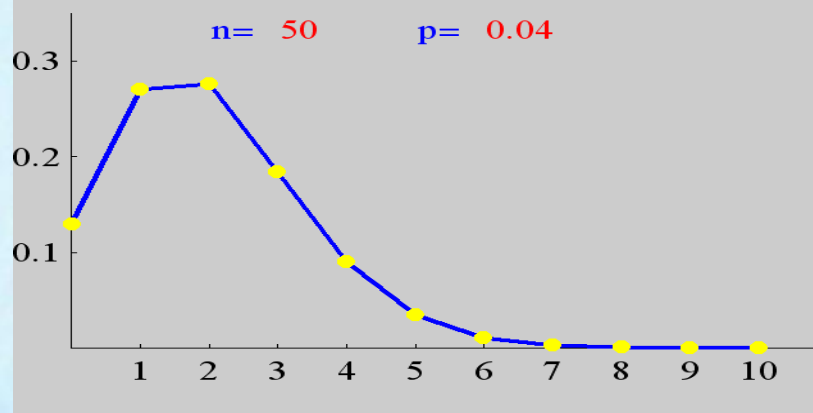
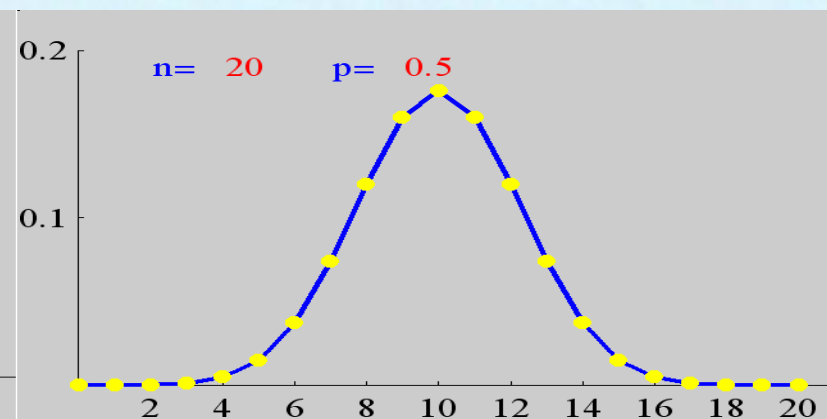
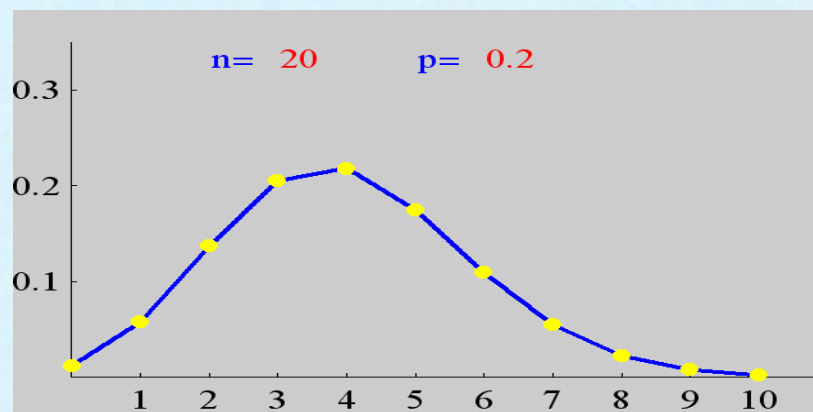
X	0	1	...	k	...	n
p_k	q^n	$\binom{n}{1} p q^{n-1}$	...	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	...	p^n

称这样的分布为**二项分布**.记为 $X \sim b(n, p)$.

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ **两点分布**

二项分布的图形

二项分布随机数演示



例如 在相同条件下相互独立地进行 5 次射击,每次射击时击中目标的概率为 0.6 ,则击中目标的次数 X 服从 $b(5,0.6)$ 的二项分布.

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$(0.4)^5$	$\binom{5}{1} 0.6 \cdot 0.4^4$	$\binom{5}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^3$	$\binom{5}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^2$	$\binom{5}{4} 0.6^4 \cdot 0.4$	0.6^5

二项分布随机数演示



例2 按规定, 某种型号的电子元件的使用寿命超过1500小时的为一等品. 已知某一大批产品的一级品率为0.2, 现在从中随机抽查20只. 问20只元件中恰有 k 只($k = 0, 1, 2, \dots, 20$)为一级品的概率是多少?

解 这是不放回抽样. 但由于这批元件的总数很大, 且抽查元件的数量相对于元件的总数来说又很小, 因而此抽样可近似当作放回抽样来处理, 这样做有一些误差, 但误差不大. 我们把检查一只元件看它是否为一等品看成是一次试验, 检查20只元件相



当于做20重伯努利试验. 以 X 记 20 只元件中一级品的只数, 那么, X 是一个随机变量, 且有 $X \sim b(20, 0.2)$. 所求概率为

$$P\{X = k\} = \binom{20}{k} (0.2)^k (0.8)^{20-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 20.$$

将计算结果列表如下:



2.2 离散型随机变量及其分布律

$$P\{X = 0\} = 0.012$$

$$P\{X = 1\} = 0.058$$

$$P\{X = 2\} = 0.137$$

$$P\{X = 3\} = 0.205$$

$$P\{X = 4\} = 0.218$$

$$P\{X = 5\} = 0.175$$

$$P\{X = 6\} = 0.109$$

$$P\{X = 7\} = 0.055$$

$$P\{X = 8\} = 0.022$$

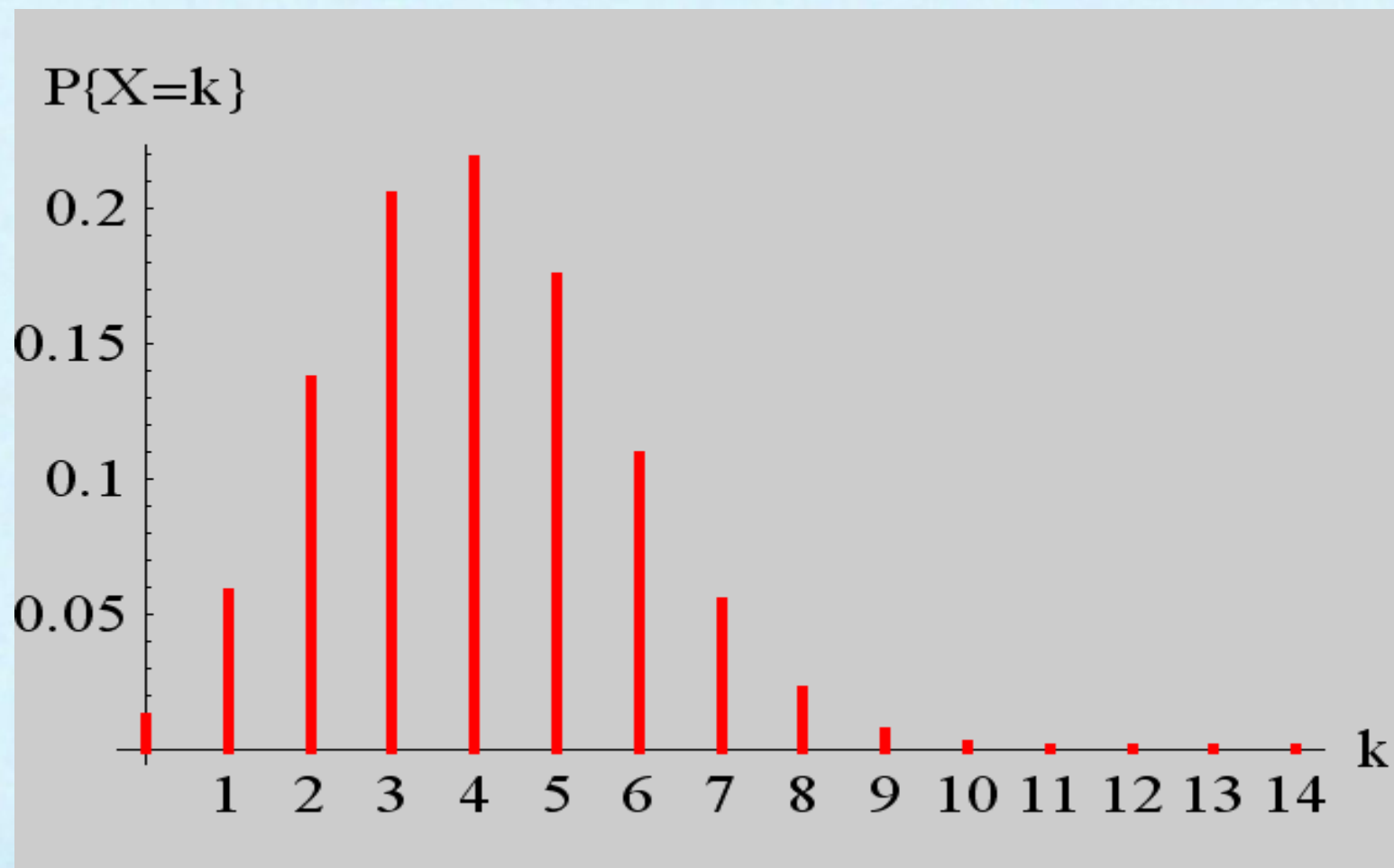
$$P\{X = 9\} = 0.007$$

$$P\{X = 10\} = 0.002$$

$$P\{X = k\} < 0.001, \text{ 当 } k \geq 11 \text{ 时}$$



图示概率分布



例3 某人进行射击, 假设每次射击的命中率为0.02, 独立射击400次, 试求至少击中两次的概率.



解 将一次射击看成是一次试验. 设击中的次数为 X , 则 $X \sim b(400, 0.02)$. X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{400}{k} (0.02)^k (0.98)^{400-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 400.$$



于是所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ &= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} = 0.9972. \end{aligned}$$

结果的实际意义:

1. 决不能轻视小概率事件.
2. 由实际推断原理, 我们怀疑 “每次射击命中率为 0.02” 这一假设, 认为该射手射击的命中率不到 0.02



例4 设有80台同类型设备, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是 0.01, 且一台设备的故障能由一个人处理. 考虑两种配备维修工人的方法, 其一是由4人维护, 每人负责20台; 其二是由3人共同维护80台. 试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

解 按第一种方法, 以 X 记“第1人维护的20台中同一时刻发生故障的台数”, 以 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示事件“第 i 人维护20台中发生故障不能及时维修”,



则知80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1) = P\{X \geq 2\}.$$

而 $X \sim b(20, 0.01)$, 故有

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - \sum_{k=0}^1 P\{X = k\} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^1 \binom{20}{k} (0.01)^k (0.99)^{20-k} \\ &= 0.0169. \end{aligned}$$



按第二种方法, 以 Y 记80台中同一时刻发生故障的台数, 此时, $Y \sim b(80, 0.01)$, 故80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y \geq 4\} = 1 - \sum_{k=0}^3 \binom{80}{k} (0.01)^k (0.99)^{80-k} = 0.0087.$$

我们发现, 在后一种情况尽管任务重了(每人平均维护约27台), 但工作效率不仅没有降低, 反而提高了.

(三) 泊松分布

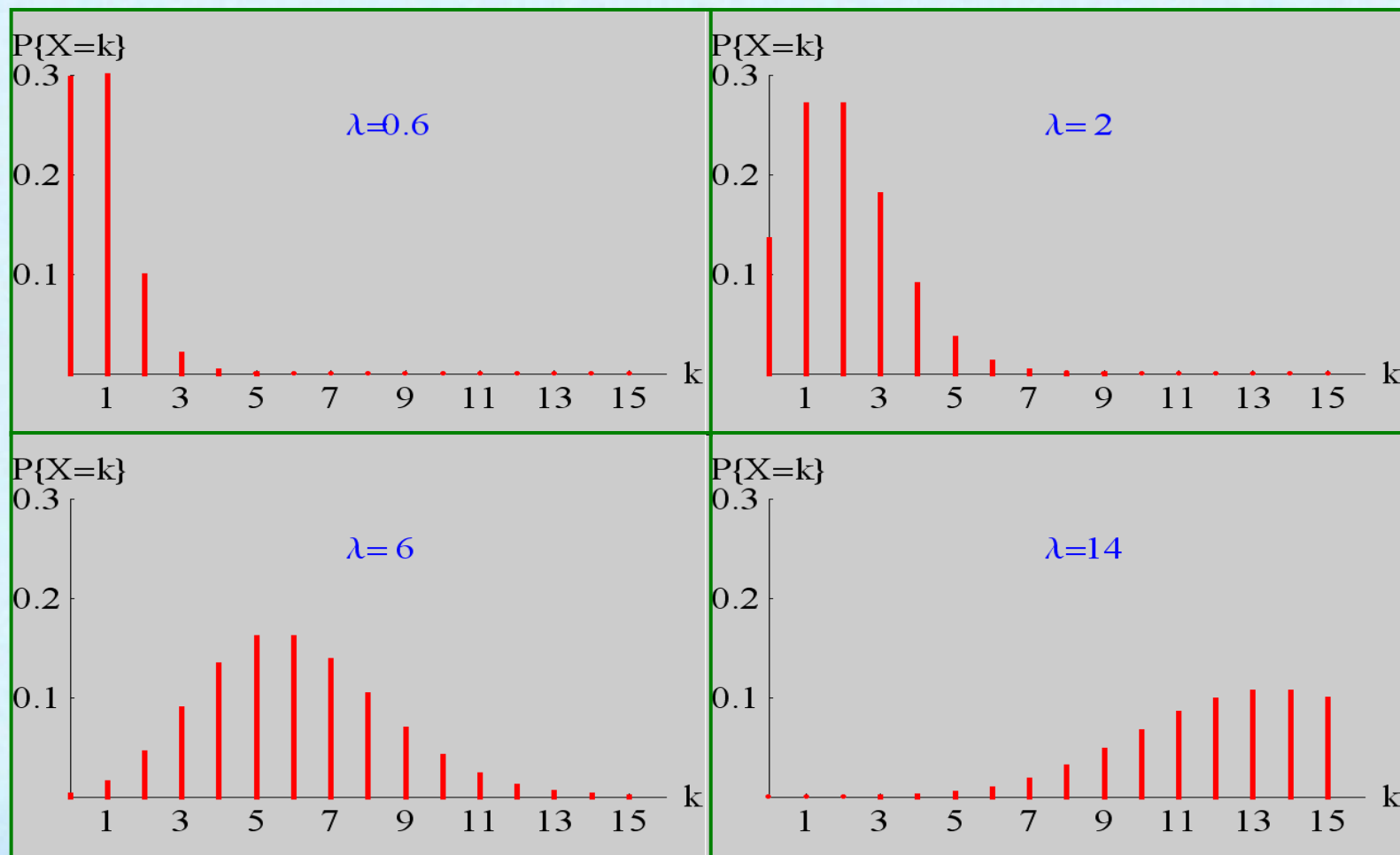
泊松资料

设随机变量 X 所有可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$, 而取各个值的概率为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim \pi(\lambda)$.

泊松分布的图形



泊松分布的背景及应用

二十世纪初卢瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的粒子个数的情况时, 他们做了2608次观察(每次时间为7.5秒), 发现放射性物质在规定的一段时间内, 其放射的粒子数 X 服从泊松分布.



地震



火山爆发



特大洪水

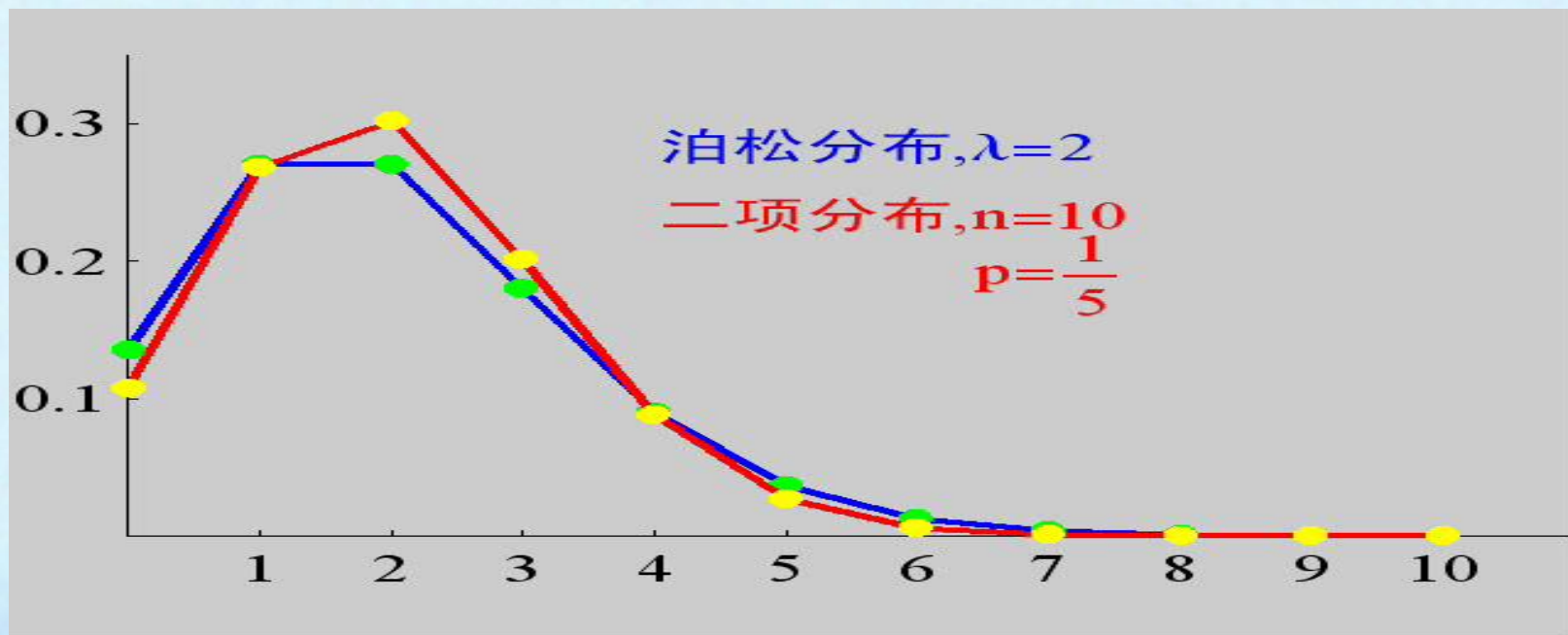


商场接待的顾客数 电话呼唤次数 交通事故次数



上面我们提到

二项分布 $np \rightarrow \lambda (n \rightarrow +\infty)$ 泊松分布



泊松定理 设 $\lambda > 0$ 是一个常数, n 是任意正整数, 设 $np_n = \lambda$, 则对于任一固定的非负整数 k , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

证 由 $p_n = \frac{\lambda}{n}$, 有

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}& \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\&= \frac{\lambda^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.\end{aligned}$$

对于固定的 k ，当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow 1,$$



$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \rightarrow 1.$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

定理的条件 $np_n = \lambda$ (常数) 意味着当 n 很大时 p_n 必定很小, 因此, 上述定理表明当 n 很大, p 很小 ($np = \lambda$) 时有以下近似式



$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\text{其中 } \lambda = np).$$

也就是说以 n, p 为参数的二项分布的概率值可以由参数为 $\lambda = np$ 的泊松分布的概率值近似。上式也能用来作二项分布概率的近似计算。



例5 计算机硬件公司制造某种特殊型号的微型芯片，次品率达0.1%，各芯片成为次品相互独立. 求在1000只产品中至少有2只次品的概率. 以 X 记产品中的次品数， $X \sim b(1000, 0.001)$.

解 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ &= 1 - (0.999)^{1000} - \binom{1000}{1} (0.999)^{999} (0.001) \\ &\approx 1 - 0.3676954 - 0.3680635 \approx 0.2642411 \end{aligned}$$



利用近似计算得: $\lambda = 1000 \times 0.001 = 1,$

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ &= 1 - e^{-1} - e^{-1} \approx 0.2642411 \end{aligned}$$

显然利用近似计算来得方便.

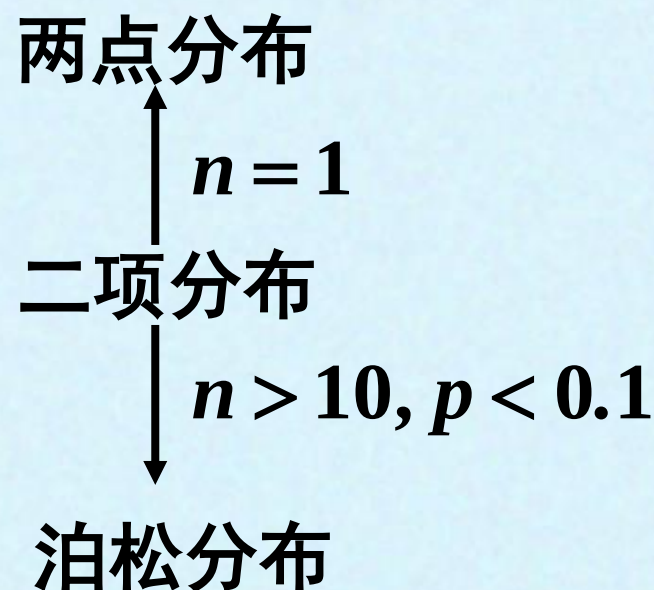
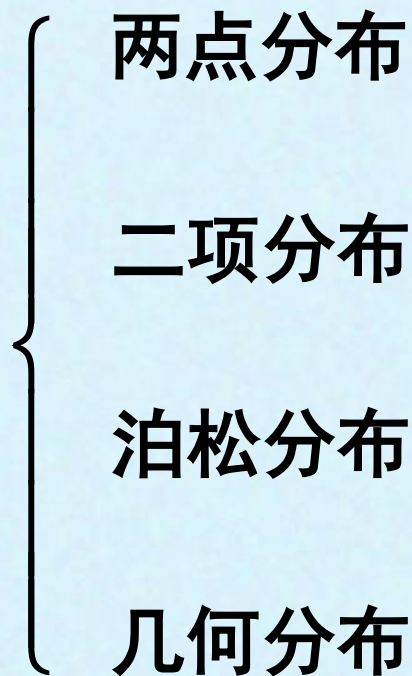
一般, 当 $n \geq 20$, $p \leq 0.05$ 时采用近似计算:

用 $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 作为 $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 的近似值颇佳.

三、小结

1.

离散型随机变量的分布



2. 二项分布与(0-1)分布、泊松分布之间的关系.

二项分布是 (0-1) 分布的推广, 对于 n 次独立重复伯努利试验, 每次试验成功的概率为 p , 设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 次试验成功,} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次试验失败.} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

它们都服从 (0-1) 分布并且相互独立, 那么

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

服从二项分布, 参数为 (n, p) .



以 n, p ($np = \lambda$) 为参数的二项分布, 当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于以 λ 为参数的泊松分布, 即

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np},$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n).$$



第三节 随机变量的分布函数

- 一、分布函数的概念
- 二、分布函数的性质
- 三、例题讲解
- 四、小结

一、分布函数的概念

1. 概念的引入

对于随机变量 X , 我们不仅要知道 X 取哪些值, 要知道 X 取这些值的概率; 而且更重要的是想知道 X 在任意有限区间 (a,b) 内取值的概率.

例如 求随机变量 X 落在区间 $(x_1, x_2]$ 内的概率.

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \underbrace{P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\}}_{\text{分布函数}}$$

$\downarrow$ $F(x_2)$ $\downarrow$ $F(x_1)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

2.分布函数的定义

设 X 是一个随机变量, x 是任意实数,函数

$$F(x)=P\{X \leq x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

称为 X 的分布函数.

说明

- (1) 分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.
- (2) 分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.



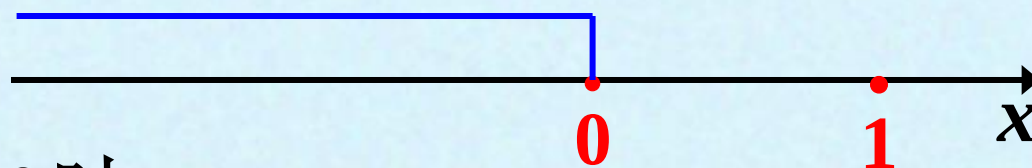
实例 抛掷均匀硬币, 令

$$X = \begin{cases} 1, & \text{出正面,} \\ 0, & \text{出反面.} \end{cases}$$



求随机变量 X 的分布函数.

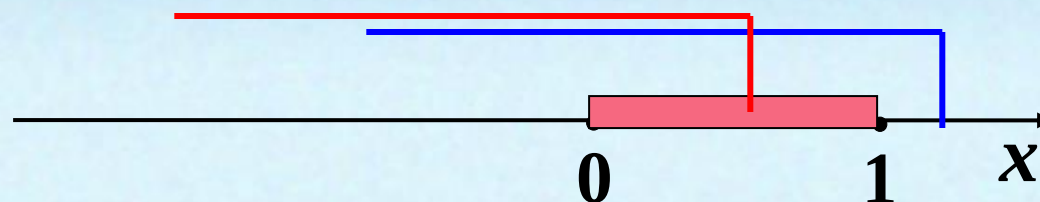
解 $p\{X = 1\} = p\{X = 0\} = \frac{1}{2},$



当 $x < 0$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x < 0\} = 0;$$





当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当 $x \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} \quad \text{得} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$



二、分布函数的性质

1° $F(x)$ 是一个不减函数.

事实上, 由定义知对任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,
有

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0.$$

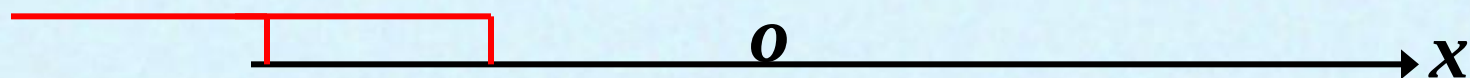
2° $0 \leq F(x) \leq 1$, 且

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

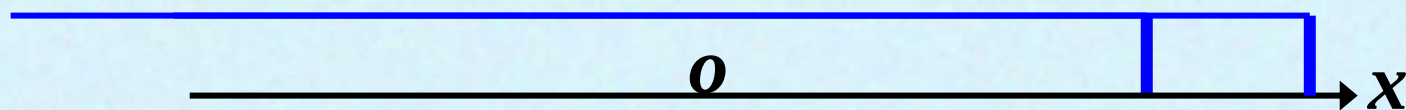
$$F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

证明 $F(x) = P\{X \leq x\}$, 当 x 越来越小时,
 $P\{X \leq x\}$ 的值也越来越小, 因而当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P\{X \leq x\} = 0;$$

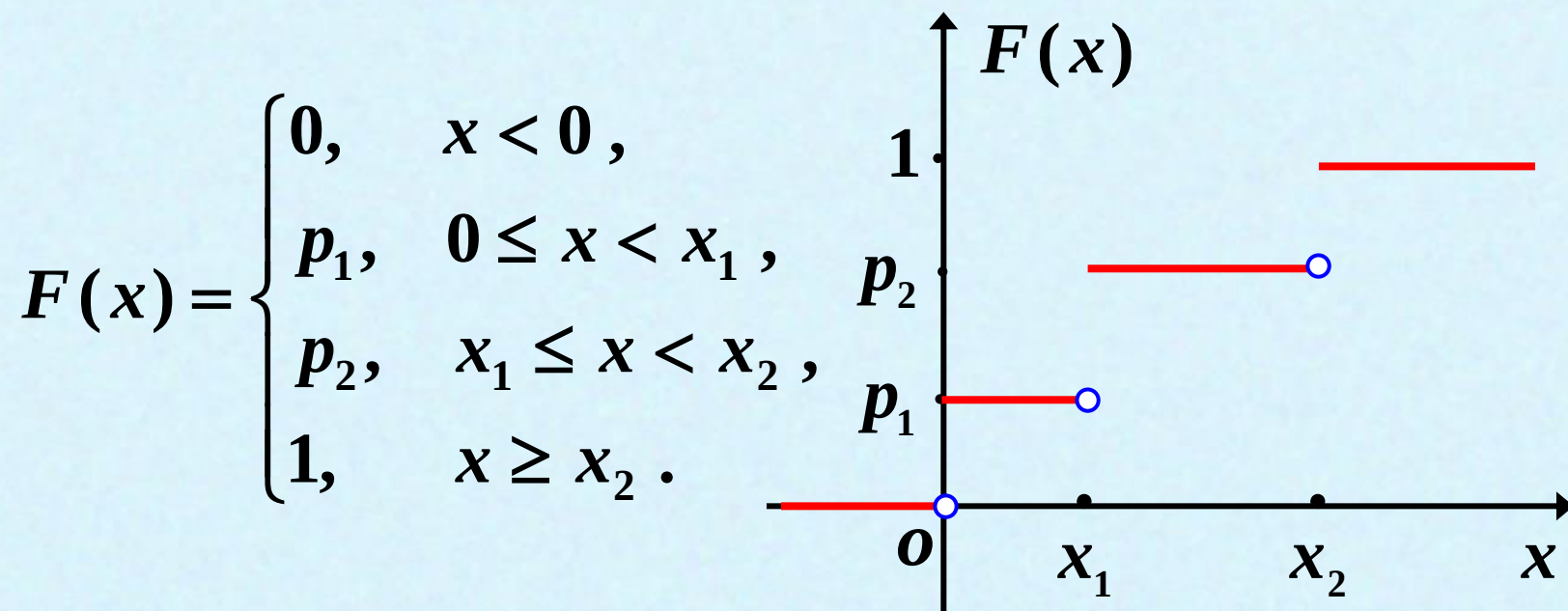


同样, 当 x 增大时 $P\{X \leq x\}$ 的值也不会减小, 而
 $X \in (-\infty, x)$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, X 必然落在 $(-\infty, \infty)$ 内.



所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P\{X \leq x\} = 1.$

3° $F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$ 是右连续的.



注意

$$P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

重要公式

$$(1) P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a),$$

$$(2) P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

证明 因为 $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$,

$$\{X \leq a\} \cap \{a < X \leq b\} = \emptyset,$$

所以 $P\{X \leq b\} = P\{X \leq a\} + P\{a < X \leq b\}$,

故 $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a).$



三、例题讲解

例1 将一枚硬币连掷三次, X 表示“三次中正面出现的次数”, 求 X 的分布律及分布函数, 并求下列概率值 $P\{1 < X < 3\}$, $P\{X \geq 5.5\}$, $P\{1 < X \leq 3\}$.

解 设 H – 正面, T – 反面, 则

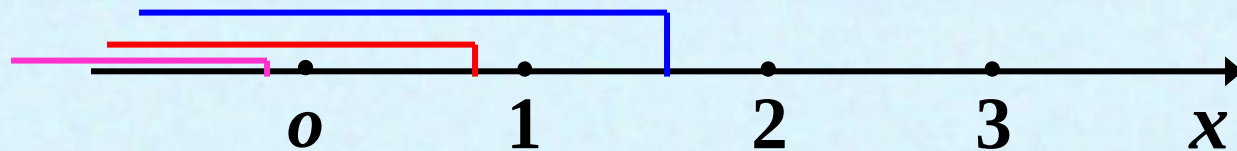
$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

因此分布律为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



求分布函数



当 $x < 0$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 0;$$

当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} = \sum_{x_i \leq 0} p_i = \frac{1}{8};$$

当 $1 \leq x < 2$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \sum_{x_i \leq 1} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$$





$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \sum_{x_i \leq 2} p_i \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};
 \end{aligned}$$

当 $x \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} \\
 &\quad + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} \\
 &= \sum_{x_i \leq 3} p_i = 1.
 \end{aligned}$$



$$\text{所以 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/8, & 0 \leq x < 1, \\ 4/8, & 1 \leq x < 2, \\ 7/8, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$P\{1 < X < 3\} = P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\} - P\{X = 3\}$$

$$= F(3) - F(1) - P\{X = 3\}$$

$$= 1 - \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$



$$\begin{aligned}P\{X \geq 5.5\} &= 1 - P\{X < 5.5\} \\&= 1 - P\{X \leq 5.5\} + P\{X = 5.5\} \\&= 1 - 1 + 0 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{1 < X \leq 3\} &= P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\} \\&= F(3) - F(1) \\&= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



例2 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数,并求 $P\{X \leq \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\}$,
 $P\{2 \leq X \leq 3\}$.

解 X 仅在-1, 2, 3三点处的概率不为0, 而 $F(x)$ 的值是 $X \leq x$ 的累积概率值, 由概率的有限可加性,

知它即为小于或等于 x 的那些 x_k 处的概率 p_k 之和，
有

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ P\{X = -1\}, & -1 \leq x < 2, \\ P\{X = -1\} + P\{X = 2\}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

即



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$F(x)$ 的图形是一条阶梯型曲线.

曲线在 $x = -1, 2, 3$ 处有跳跃点, 跳跃值分别为

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$$



$$P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$P\left\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\right\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} P\{2 \leq X \leq 3\} &= F(3) - F(2) + P\{X = 2\} \\ &= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



一般, 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

由概率的可列可加性得 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_k\},$$

即

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k,$$

这里和式是对所有满足 $x_k \leq x$ 的 k 求和的.**分布函数** $F(x)$ 在 $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots$)处有跳跃, **其跳跃值为** $p_k = P\{X = x_k\}$.



例3 一个靶子是半径为 $2m$ 的圆盘, 设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘面积成正比, 并设射击都能中靶, 以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 X 的分布函数.



解 若 $x < 0$, 则 $\{X \leq x\}$ 是不可能事件,



于是 $F(x) = P\{X \leq x\} = 0;$

若 $0 \leq x \leq 2$, 由题意, $P\{0 \leq X \leq x\} = kx^2$, k 是常数. 为了确定 k 的值, 取 $x = 2$, 有

$$P\{0 \leq X \leq 2\} = 2^2 k,$$

但已知 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$, 故得 $k = 1/4$, 即

$$P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}$$

于是

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}.$$



若 $x \geq 2$, 由题意 $\{X \leq x\}$ 是必然事件, 于是

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1.$$

综上所述, 即得 X 的分布函数为

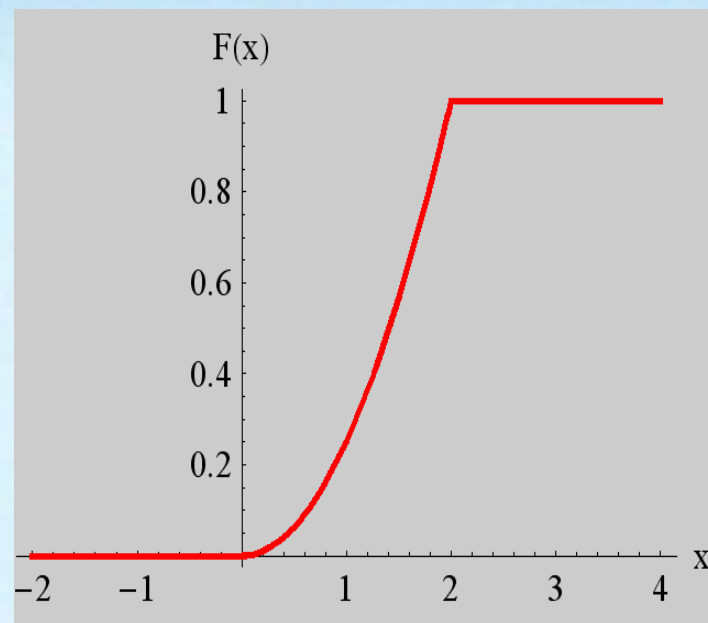
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

它的图形是一条连续曲线, 如下图所示.



若记
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 < t < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$



$F(x)$ 恰是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分，
此时称 X 为连续型随机变量。

注意 两类随机变量的分布函数图形的特点不一样。



请同学们思考

不同的随机变量,它们的分布函数一定也不相同吗?

答 不一定. 例如抛均匀硬币, 令

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{出正面;} \\ -1, & \text{出反面.} \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} -1, & \text{出正面;} \\ 1, & \text{出反面.} \end{cases}$$

X_1 与 X_2 在样本空间上的对应法则不同, 是两个不同的随机变量, 但它们却有相同的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ 1/2, & -1 < x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$



离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律

$$p_k = P\{X = x_k\}$$



分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

离散型随机变量分布函数演示



四、小结

1.离散型随机变量的分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_k \cdot$$

2.分布律与分布函数的关系

第四节 连续型随机变量及其概率密度

- 一、概率密度的概念与性质
- 二、常见连续型随机变量及其概率分布
- 三、小结

一、概率密度的概念与性质

1. 概率密度函数的定义

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负可积函数 $f(x)$, 使对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

则称 X 为连续型随机变量, 其中函数 $f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**, 简称**概率密度**.

连续型随机变量的分布函数是连续函数.



2. 概率密度函数的性质

1° $f(x) \geq 0$;

2° $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

3° 对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$,

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx;$$

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$.



证明 2° $1 = F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$

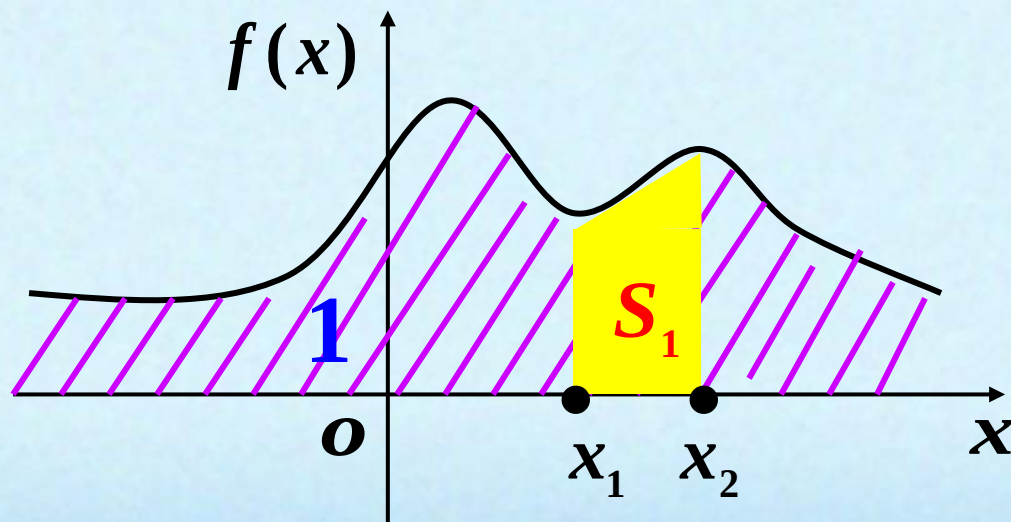
3° $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$



同时得以下计算公式

$$P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx,$$

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \int_a^{-\infty} f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$.



注意

对于任意指定值 a , 连续型随机变量取 a 的概率等于零. 即 $P\{X = a\} = 0$.

$$\text{证明 } P\{X = a\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^{a+\Delta x} f(x) dx = 0.$$

$$\begin{aligned} P\{a \leq X \leq b\} &= P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} \\ &= P\{a < X < b\}. \end{aligned}$$

连续型随机变量取值落在某区间的概率与端点无关



注意

若 X 是连续型随机变量, $\{X=a\}$ 是不可能事件, 则有 $P\{X=a\}=0$.

若 $P\{X=a\}=0$,
则不能确定 $\{X=a\}$ 是不可能事件



连续型

若 X 为离散型随机变量,
 $\{X=a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X=a\}=0$.



离散型

例1 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ; (2) 求 X 的分布函数; (3) 求

$$P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\}.$$

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, 得



$$\int_0^3 kx dx + \int_3^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = 1,$$

解得 $k = \frac{1}{6}$. 于是 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



(2) X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x \frac{x}{6} dx, & 0 \leq x < 3, \\ \int_0^3 \frac{x}{6} dx + \int_3^x (2 - \frac{x}{2}) dx, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$



即

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{12}, & 0 \leq x < 3, \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4}, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$(3) \quad P\left\{1 < X \leq \frac{7}{2}\right\} = F\left(\frac{7}{2}\right) - F(1) = \frac{41}{48}.$$



二、常见连续型随机变量及其概率分布

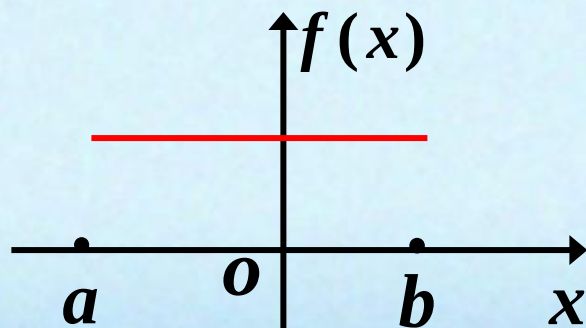
(一)均匀分布 若连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则称 X 在 (a,b) 上服从均匀分布. 记为 $X \sim U(a,b)$.

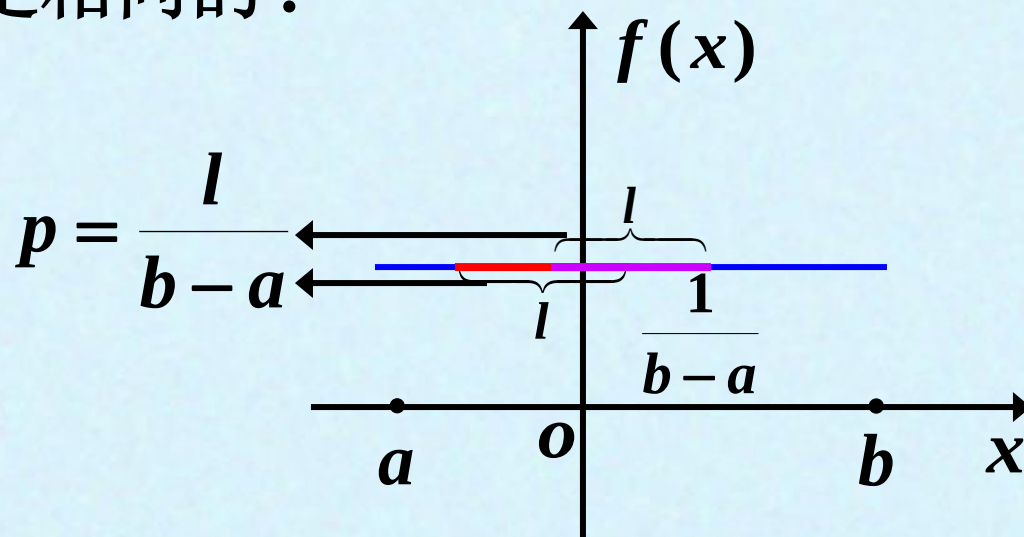
概率密度函数图形

均匀分布概率密度函数演示



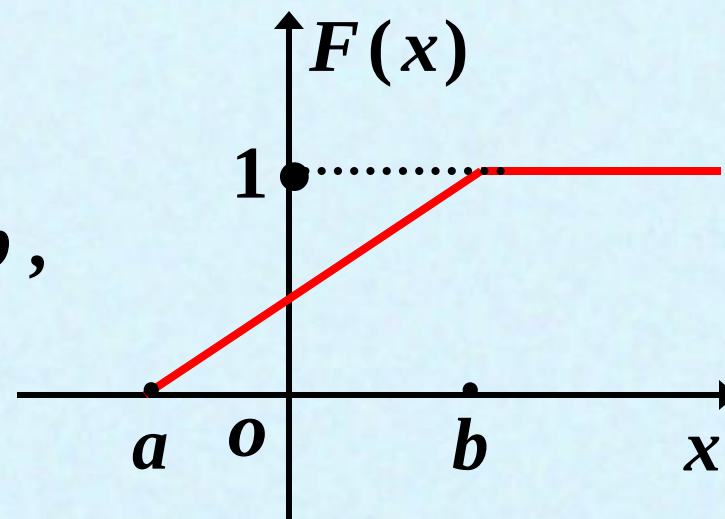
均匀分布的意义

在区间 (a,b) 上服从均匀分布的随机变量 X ，落在区间 (a,b) 中任意等长度的子区间内的可能性是相同的。



分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$



均匀分布分布函数图形演示



例2 设电阻值 R 是一个随机变量, 均匀分布在 $900\Omega \sim 1100\Omega$. 求 R 的概率密度及 R 落在 $950\Omega \sim 1050\Omega$ 的概率.

解 按题意, R 的概率密度为

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{1100 - 900}, & 900 < r < 1100, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故有

$$P\{950 < R \leq 1050\} = \int_{950}^{1050} \frac{1}{200} dr = 0.5.$$

(二) 指数分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为

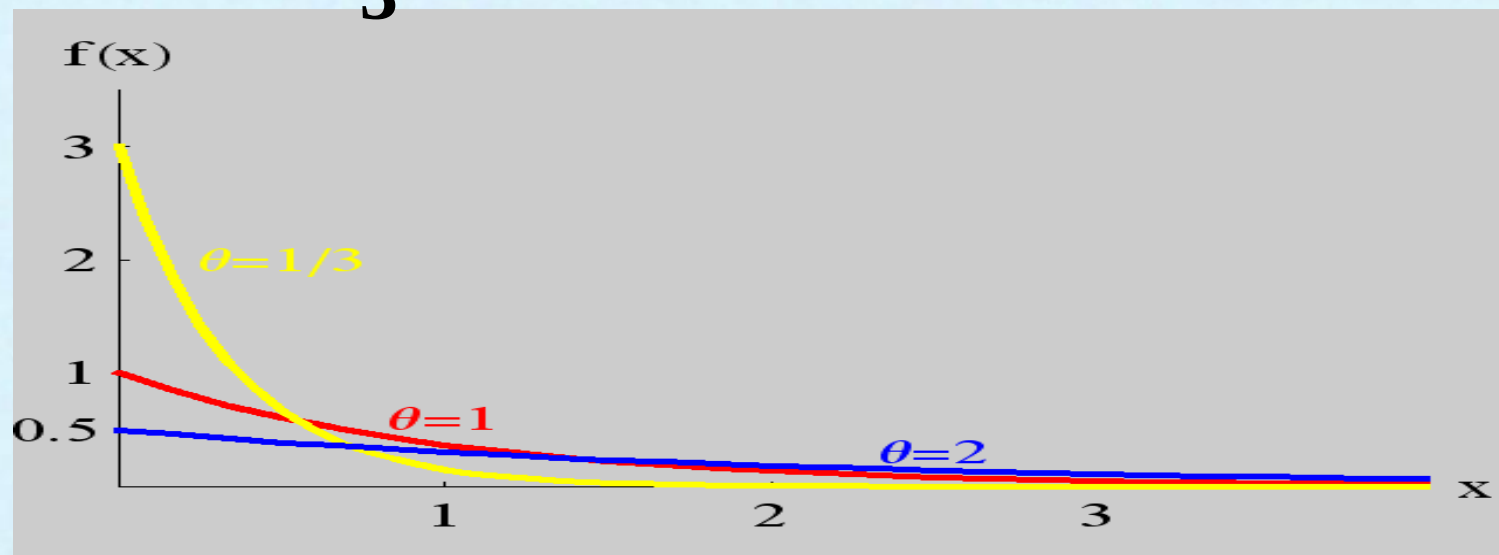
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 θ 的指数分布.

易知 $f(x) \geq 0$, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.



下图为 $\theta = \frac{1}{3}$, $\theta = 1$, $\theta = 2$ 时 $f(x)$ 的图形.

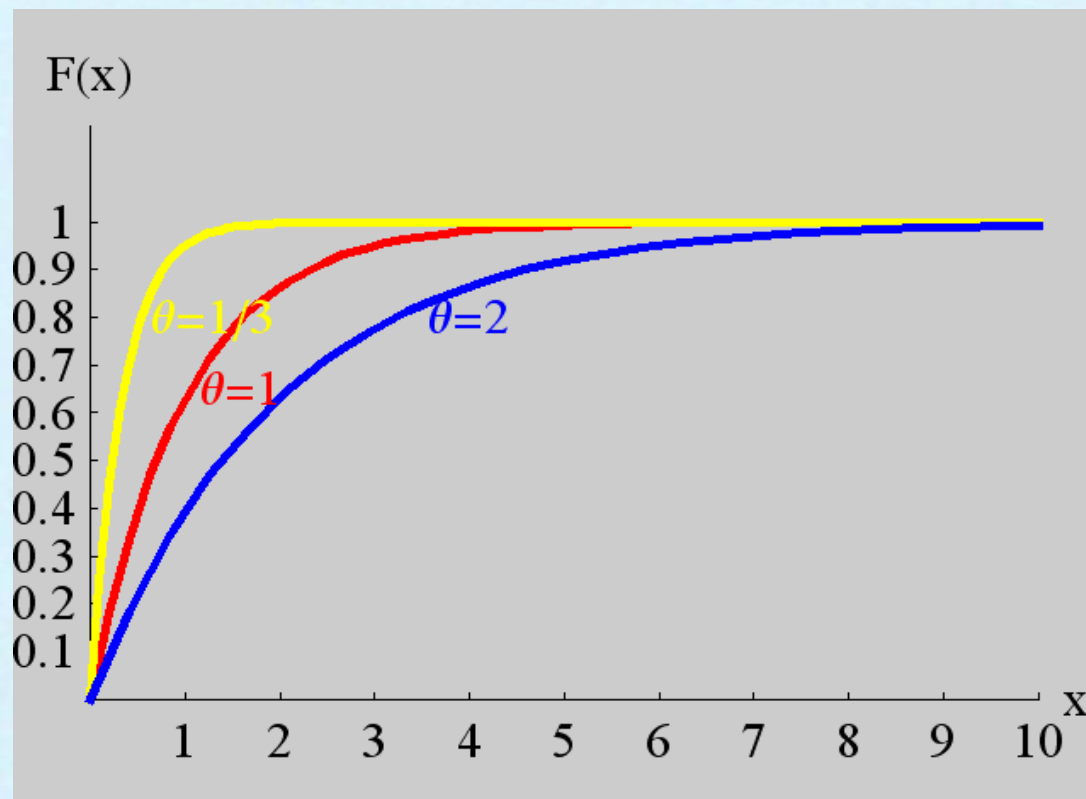


由定义得随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



$\theta = \frac{1}{3}, \theta = 1, \theta = 2$ 时 $F(x)$ 的图形如下:



指数分布的重要性质：“无记忆性”。

对于任意 $s, t > 0$, 有

$$P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}.$$

事实上

$$P\{X > s + t | X > s\} = \frac{P\{(X > s + t) \cap (X > s)\}}{P\{X > s\}}$$

$$= \frac{P\{X > s + t\}}{P\{X > s\}} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)}$$

$$= \frac{e^{-(s+t)/\theta}}{e^{-s/\theta}} = e^{-t/\theta} = P\{X > t\}.$$



如果 X 是某一元件的寿命,那么无记忆性表明:
已知元件已使用 s 小时,它总共能使用至少 $s + t$ 小时的
条件概率与从开始使用时算起,它至少能用 t 小时的
概率相等. 这就是说:

元件对它已使用过 s 小时没有记忆.



应用与背景

某些元件或设备的寿命服从指数分布.例如无线电元件的寿命、电力设备的寿命、动物的寿命等都服从指数分布.



(三)、正态分布

正态分布的概率密度函数

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

其中 $\mu, \sigma(\sigma > 0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的
正态分布或高斯分布. 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

高斯资料



显然 $f(x) \geq 0$, 下面来证明 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

令 $(x - \mu)/\sigma = t$, 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt,$$

记 $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$, 则有 $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)/2} dt du$

利用极坐标将它化成累次积分, 得到

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr d\theta = 2\pi,$$

而 $I > 0$, 故有 $I = \sqrt{2\pi}$, 即有

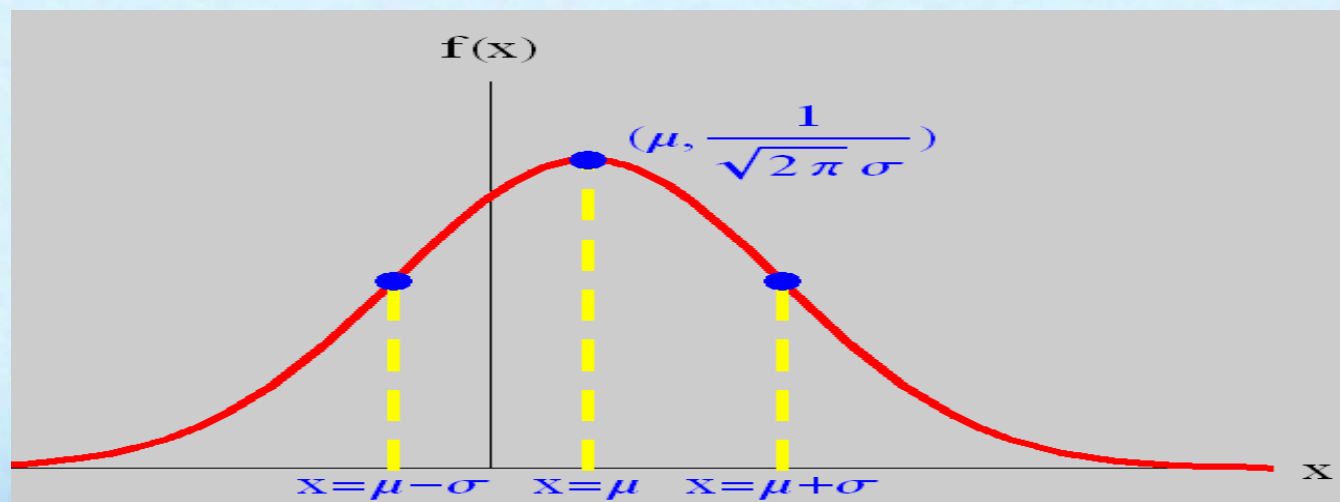


$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi},$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1.$$

$f(x)$ 的图形如图所示.



性质:

1° 曲线关于 $x = \mu$ 对称. 这表明对于任意 $h > 0$,
有 $P\{\mu - h < X \leq \mu\} = P\{\mu < X \leq \mu + h\}.$

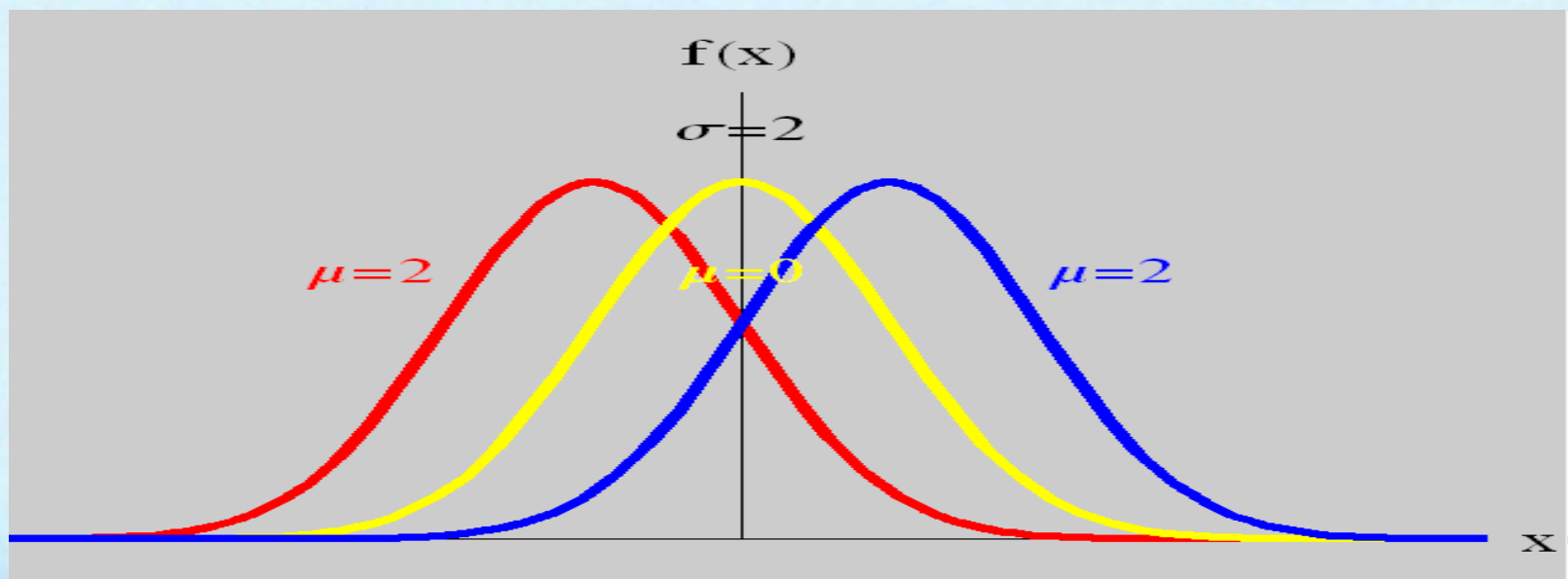
2° 当 $x = \mu$ 时取到最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$

3° 在 $x = \mu \pm \sigma$ 处曲线有拐点;

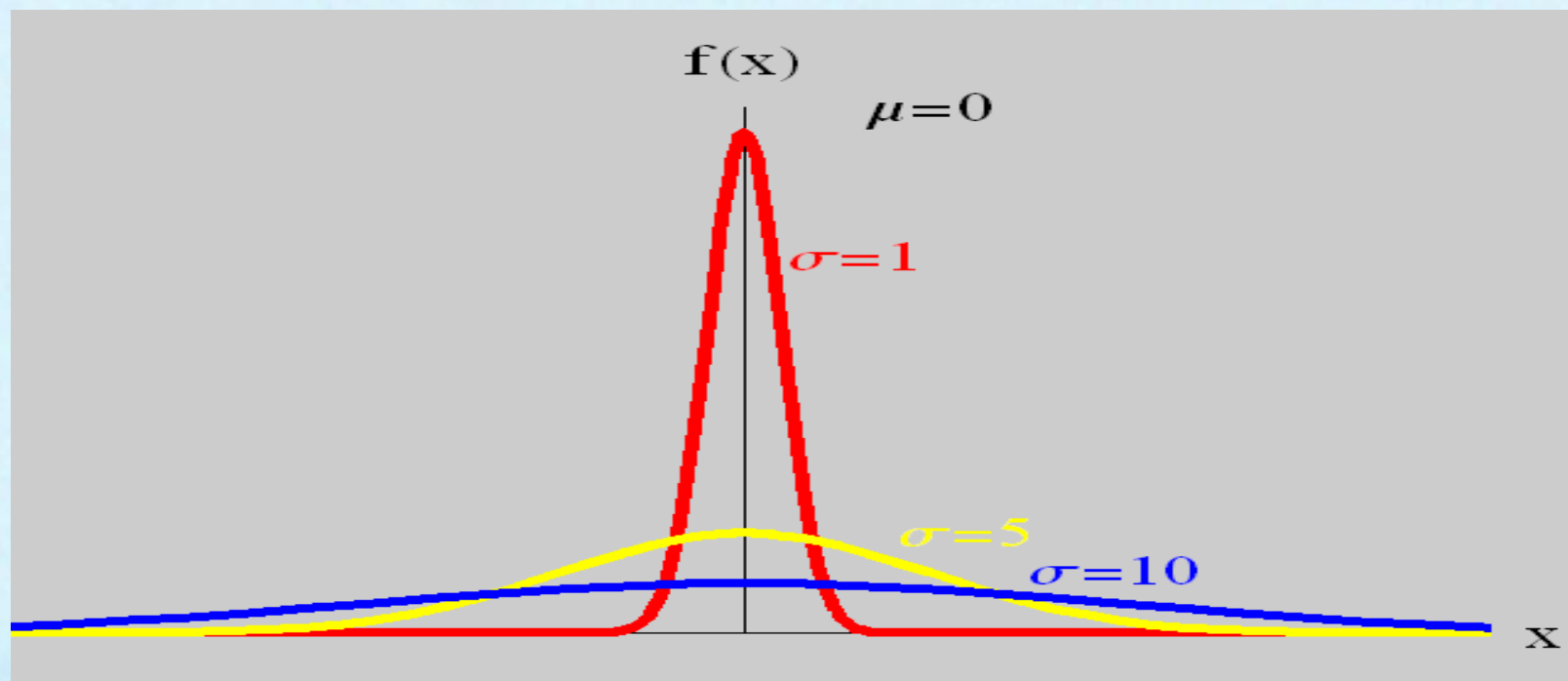
4° 曲线以 x 轴为渐近线;



5° 如果固定 σ , 改变 μ 的值, 则图形沿着 Ox 轴平移, 而不改变其形状, 可见正态分布的概率密度曲线 $y = f(x)$ 的位置完全由参数 μ 所确定. μ 称为位置参数.

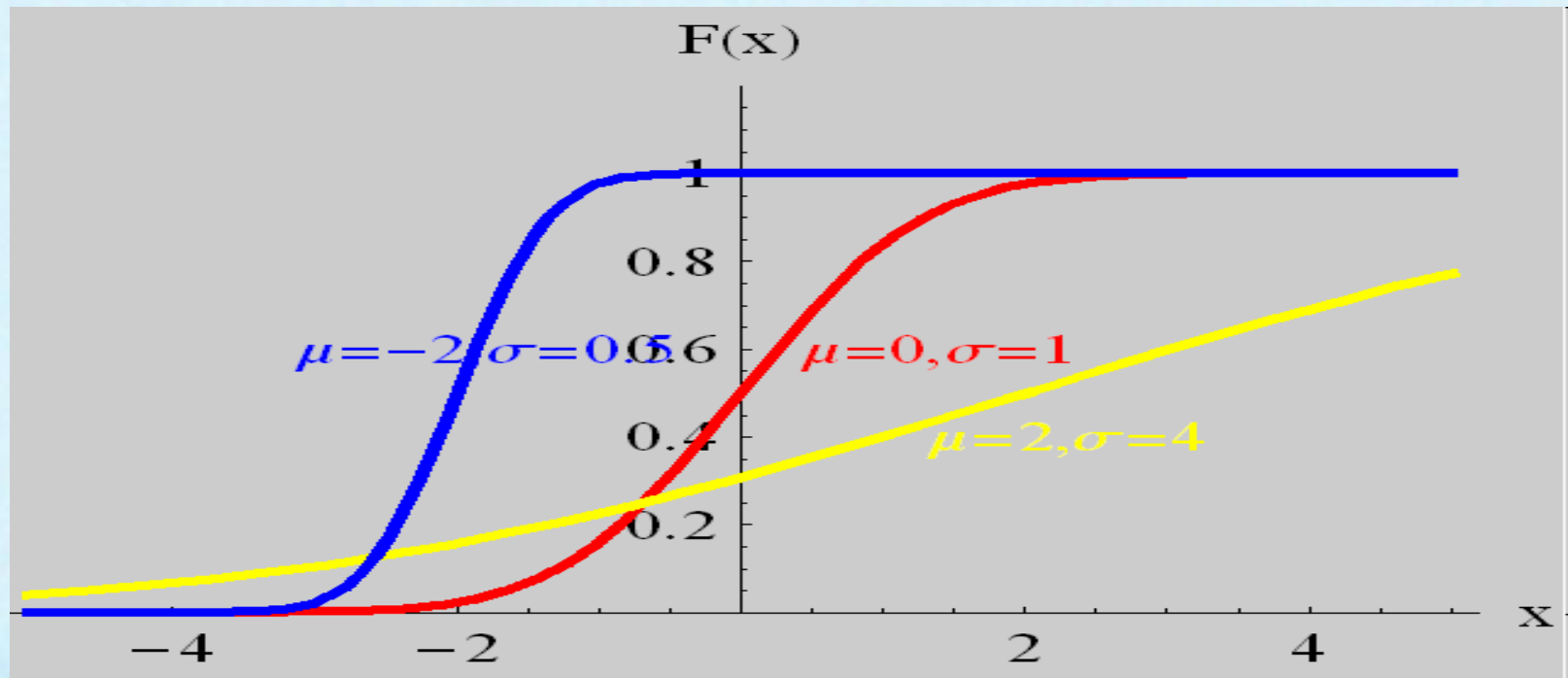


6°当固定 μ , 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 图形的对称轴不变, 而形状在改变, σ 越小, 图形越高越瘦, σ 越大, 图形越矮越胖.



分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$



当 $\mu = 0$, $\sigma = 1$ 时称 X 服从标准正态分布.
其概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ 表示,
即有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

易知

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布, 例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等; 正常情况下生产的产品尺寸、直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.



正态分布的计算

$$P\{X \leq x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

原函数不是初等函数

= ?

方法一:利用MATLAB软件包计算(演示)

方法二:转化为标准正态分布查表计算



引理 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

证 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ 的分布函数为

$$P\{Z \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right\} = P\{X \leq \mu + \sigma x\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu + \sigma x} e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

令 $\frac{t - \mu}{\sigma} = u$, 得



$$P\{Z \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \Phi(x)$$

由此知 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

标准正态分布的概率密度表示为

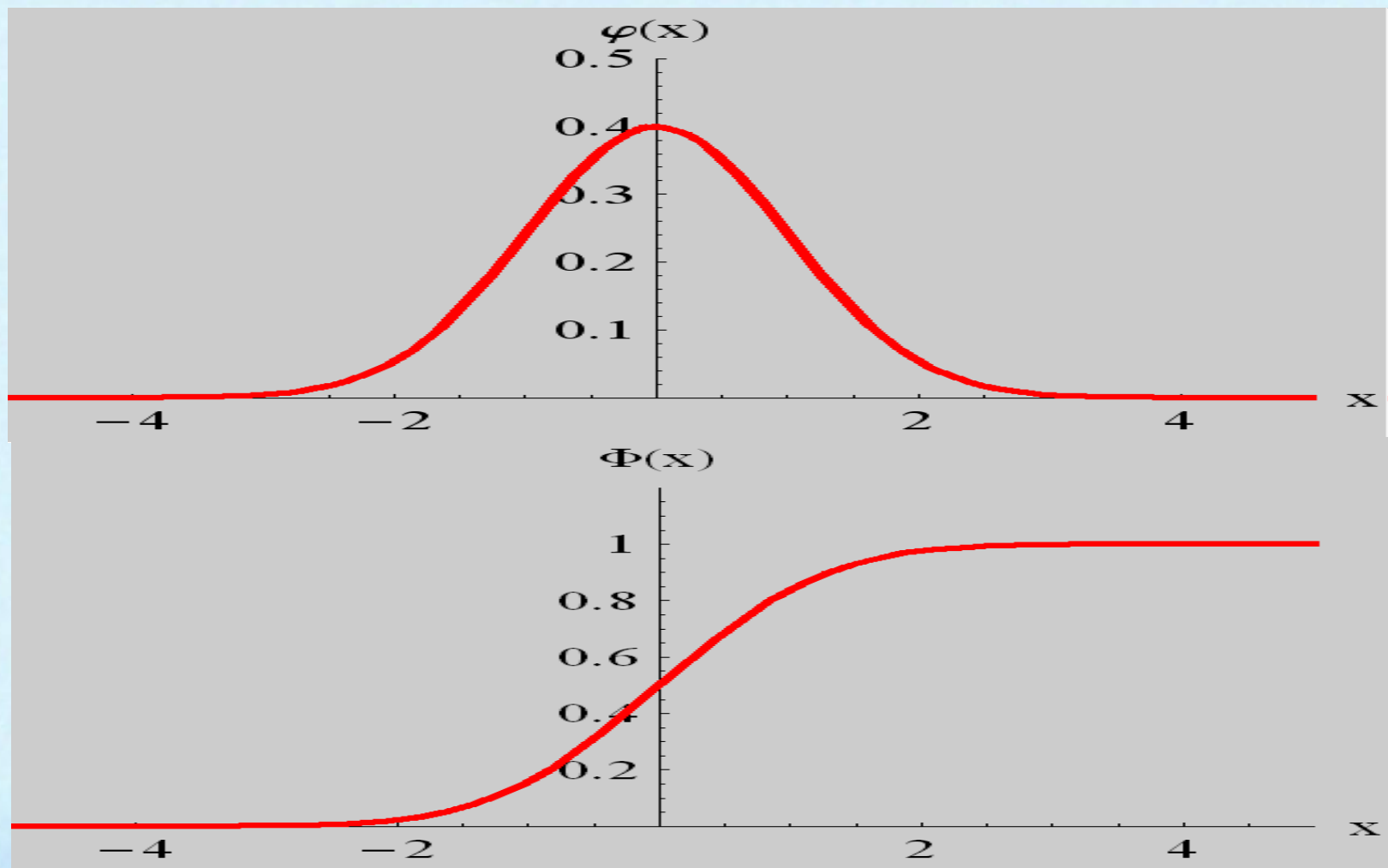
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

则其分布函数 $F(x)$ 为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$



标准正态分布的图形



对于任意区间 $(x_1, x_2]$, 有

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2\} &= P\left\{\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$



性质 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

证明

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\&= \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \\&= 1 - \Phi(x).\end{aligned}$$



例3 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内. 调节器整定在 $d^{\circ}\text{C}$, 液体的温度 X (以 $^{\circ}\text{C}$ 计) 是一个随机变量, 且 $X \sim N(d, 0.5^2)$. (1) 若 $d = 90$, 求 X 小于 89°C 的概率; (2) 若要求保持液体的温度至少为 80°C 的概率不低于0.99, 问 d 至少为多少?

解 (1) 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X < 89\} &= P\left\{\frac{X - 90}{0.5} < \frac{89 - 90}{0.5}\right\} = \Phi\left(\frac{89 - 90}{0.5}\right) \\ &= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228. \end{aligned}$$



(2) 按题意需求 d 满足

$$\begin{aligned} 0.99 &\leq P\{X \geq 80\} = P\left\{\frac{X - d}{0.5} \geq \frac{80 - d}{0.5}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - d}{0.5} < \frac{80 - d}{0.5}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{80 - d}{0.5}\right) \end{aligned}$$

即 $\Phi\left(\frac{d - 80}{0.5}\right) \geq 0.99 = \Phi(2.327),$

亦即 $\frac{d - 80}{0.5} \geq 2.327.$

故需 $d > 81.1635.$



对于标准正态随机变量, 我们引入上 α 分位点的定义.

设 $X \sim N(0,1)$, 若 z_α 满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

则称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点.

下面列出了几个常用的 z_α 的值.

α	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
z_α	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282

由 $\varphi(x)$ 图形的对称性知道 $z_{1-\alpha} = z_\alpha$.

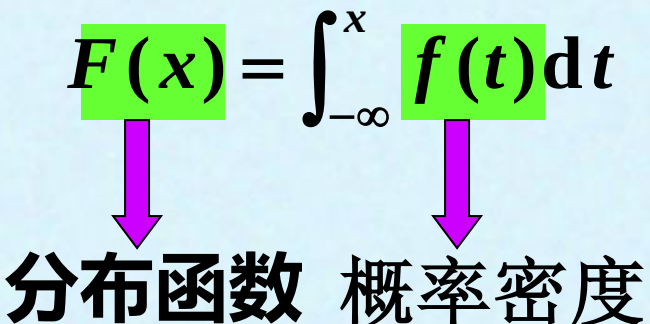
补充例题



三、小结

1. 连续型随机变量

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



分布函数 概率密度

2. 常见连续型随机变量的分布

均匀分布
正态分布(或高斯分布)
指数分布



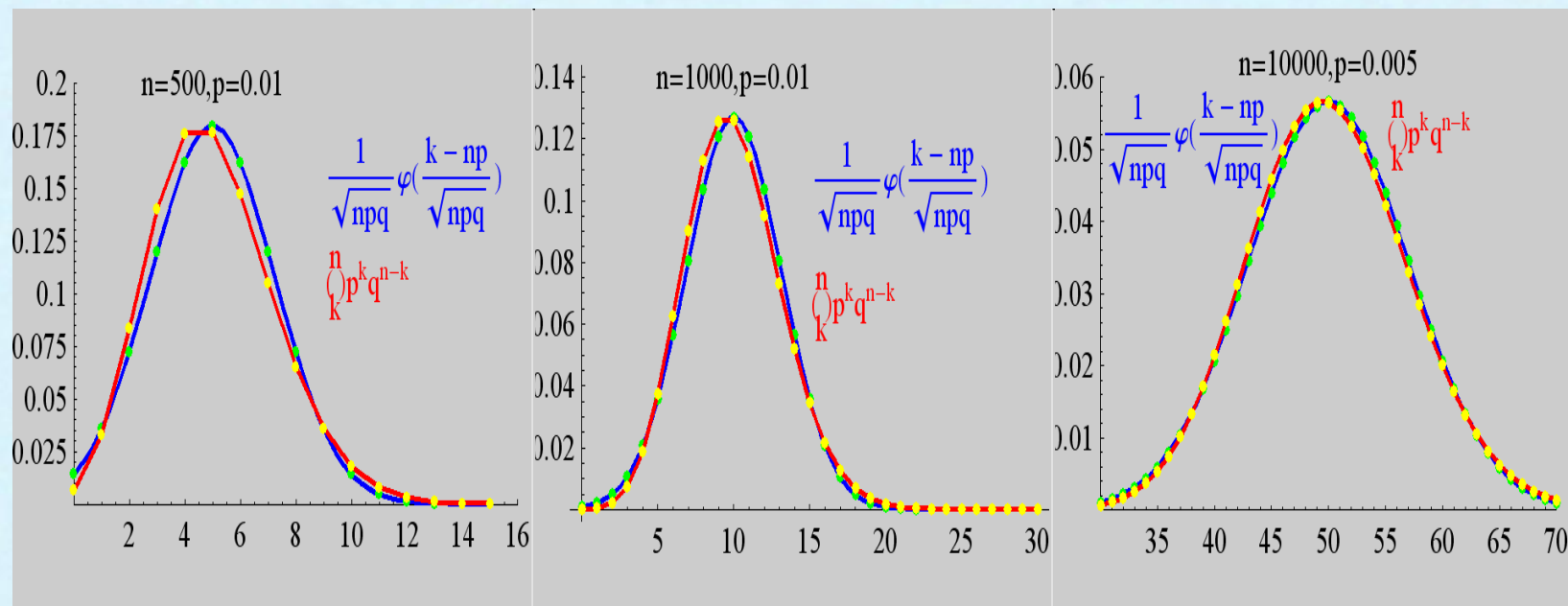
3. 正态分布是概率论中最重要的分布

正态分布有极其广泛的实际背景, 是自然界和社会现象中最为常见的一种分布, 一个变量如果受到大量微小的、独立的随机因素的影响, 那么这个变量一般是一个正态随机变量.

二项分布、泊松分布等的极限分布是正态分布. 所以, 无论在实践中, 还是在理论上, 正态分布是概率论中重要的一种分布.



二项分布向正态分布的转换



第五节 随机变量的函数的分布

- 一、离散型随机变量的函数的分布
- 二、连续型随机变量的函数的分布
- 三、小结

一、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 X 的一切可能值 x 的集合上的函数, 若随机变量 Y 随着 X 的取值 x 的值而取 $y = f(x)$ 的值, 则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数, 记作 $Y = f(X)$.

问题

若已知的随机变量 X 的分布,
如何来求随机变量 $Y = f(X)$ 的分布?



例1 设随机变量 X 具有以下分布律,
试求 $Y = (X - 1)^2$ 的分布律.

X	-1	0	1	2
p	0.2	0.3	0.1	0.4

解 Y 所有可能取的值为0, 1, 4.

$$P\{Y = 0\} = P\{(X - 1)^2 = 0\} = P\{X = 1\} = 0.1,$$

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 2\} = 0.7,$$

$$P\{Y = 4\} = P\{X = -1\} = 0.2$$



即得 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2



如果 X 是离散型随机变量, 其函数 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量. 若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y = g(X)$ 的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

注意 若 $g(x_k)$ 中有值相同的, 应将相应的 p_k 合并.



如果设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

则 $Y = X^2 - 5$ 的分布律

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



二、连续型随机变量的函数的分布

例2 设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求随机变量 $Y = 2X + 8$ 的概率密度.

解 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$.

下面先来求 $F_Y(y)$.



$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{2X + 8 \leq y\} \\ &= P\left\{X \leq \frac{y-8}{2}\right\} = F_X\left(\frac{y-8}{2}\right). \end{aligned}$$

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导数, 得 $Y = 2X + 8$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \left(\frac{y-8}{2}\right)' \\ &= \begin{cases} \frac{1}{8} \left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\left(\frac{y-8}{2}\right)' \\ &= \begin{cases} \frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$



例3 设随机变量 X 具有分布概率密度 $f_X(x)$,
 $-\infty < x < \infty$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$.

先来求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 由于 $Y = X^2 \geq 0$, 故当
 $y \leq 0$ 时 $F_Y(y) = 0$. 当 $y > 0$ 时有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$



将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导数, 即得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

例如, 设 $X \sim N(0,1)$, 其概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

则 $Y = X^2$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

此时称 Y 服从自由度为1的 χ^2 分布.



定理 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, 设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.



证 我们只证 $g'(x) > 0$ 的情况.

此时 $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 严格单调增加, 其反函数 $h(y)$ 存在, 且在 (α, β) 严格单调增加, 可导. 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$. 现在先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

因为 $Y = g(X)$ 在 (α, β) 内取值,

故当 $y \leq \alpha$ 时, 有 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;

当 $y \geq \beta$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$.

当 $\alpha < y < \beta$ 时,



$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} \\ &= P\{X \leq h(y)\} = F[h(y)]. \end{aligned}$$

将 $F_Y(Y)$ 关于 y 求导数, 即得 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]h'(y), & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对于 $g'(x) < 0$ 的情况可以同样地证明, 此时有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)][-h'(y)], & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

合并以上两式, 定理得证.

若 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 以外等于零, 则只需假设在 $[a, b]$ 上恒有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$), 此时,
 $\alpha = \min\{g(a), g(b)\}, \quad \beta = \max\{g(a), g(b)\}.$



例4 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

证 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

现在 $y = g(x) = ax + b$, 由此式解得

$$x = h(y) = \frac{y - b}{a},$$

且有 $h'(y) = \frac{1}{a}$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), -\infty < y < \infty.$$

即

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}},$$
$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, -\infty < y < \infty.$$

即有 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$.

取 $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$, 得 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.



例5 设电压 $V = A \sin \Theta$, 其中 A 是一个已知的正常数, 相角 Θ 是一个随机变量, 且有

$$\Theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

求电压 V 的概率密度.

解 $v = g(\theta) = A \sin \theta$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒有 $g'(\theta) = A \cos \theta > 0$, 且有反函数

$$\theta = h(v) = \arcsin \frac{v}{A}, \quad h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$



Θ 的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$V = A \sin \Theta$ 的概率密度为

$$\varphi(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}}, & -A < v < A, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

注意

若 $\Theta \sim U(0, \pi)$, 此时 $v = g(\theta) = A \sin \theta$ 在 $(0, \pi)$ 上
不是单调函数.



三、小结

1. 离散型随机变量的函数的分布

若 $Y = g(X)$ 且 X 的分布律为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y = g(X)$ 的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$



2. 连续型随机变量的函数的分布

方法1 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$

$$= \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

方法2

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

注意条件.