

《线性代数》模拟试卷（十六）答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是().

- A. $k = -2$ B. $k = 3$ C. $k \neq -2$ 且 $k \neq 3$ D. $k = -2$ 或 $k = 3$

答案：D.

2. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, 则 a, b, c 的值分别为().

- A. $a = -10, b = 1, c = 1$ B. $a = -10, b = 1, c = -1$
C. $a = 10, b = -1, c = -1$ D. $a = 10, b = -1, c = 1$

答案：B.

3. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 及矩阵 $B = (A, b)$ 的秩分别为().

- A. $R(A) = 2, R(A, b) = 3$ B. $R(A) = 2, R(A, b) = 4$
C. $R(A) = R(A, b) = 2$ D. $R(A) = R(A, b) = 3$

答案：A.

4. 设方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_2 - x_3 = b \\ x_3 - x_4 = c \\ x_4 - x_5 = d \\ x_5 - x_1 = e \end{cases}$ 有解, 则 a, b, c, d, e 满足()

- A. $a = b = c, d = e$ B. $a = b = c = d = e$ C. $a + b + c + d + e = 0$ D. $abcde \neq 0$

答案: C.

5. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 在下列向量组中也线性无关的向量组是().

A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

B. $3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$

D. $\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

答案: C.

6. 设 $\lambda = 2$ 为可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等().

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

答案: C.

二、填空题 (每小空 3 分, 共 12 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $(a+3b)(a-b)^3.$

2. 设 A, B 是 3 阶方阵, E 是 3 阶单位阵, $|A|=2$ 且 $A^2 + AB + 2E = 0$, 则

$|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: -4.

3. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & 4 \end{pmatrix}$ 的标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $a=1.$

4. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $a=-1.$

三、计算题 (共 8 小题, 共 70 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

解: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ (3 分)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{vmatrix}$$
 (5 分)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{vmatrix}$$
 (6 分)

$$= -15$$
 (7 分)

2. 设四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} - 2A_{12} + 2A_{13} - A_{14}$ 之值. (8 分)

解: 方法一:

$$A_{11} - 2A_{12} + 2A_{13} - A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
 (4 分)

$$= 0$$
 (8 分)

方法二:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \quad (6 \text{ 分})$$

则 $A_{11} - 2A_{12} + 2A_{13} - A_{14} = 0$. (8 分)

3. 解矩阵方程 $AX+B=X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. (8 分)

解: 由 $AX+B=X$ 知 $(E-A)X=B$, 构造矩阵 $(E-A|B)$ 并对其进行初等行变换把它变为行阶梯形矩阵 (2 分)

$$(E-A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{array} \right) \quad (3 \text{ 分})$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{即 } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8 \text{ 分})$$

4. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$, 已知 $R(\mathbf{A})=2$, 求 λ 与 μ 的值. (6 分)

解: 对矩阵 $\mathbf{A}$ 做初等行变换把它变为行阶梯形矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & \mu-5 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & \mu-1 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

由 $R(\mathbf{A})=2$ 知, $5-\lambda=0$, $\mu-1=0$, 则 $\lambda=5$, $\mu=1$. (6 分)

5. 设线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$, 讨论 λ 取何值时, 此方程组 (1) 无解?

(2) 有唯一解? (3) 有无穷多解? 并在方程组有无穷多解时, 求其通解. (12 分)

解: 对增广矩阵 $\mathbf{B}=(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵, 有

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3(\lambda-1) \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 3(\lambda-1) \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda+2) & 3(\lambda-1) \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

(1) 当 $\lambda = -2$ 时, $R(\mathbf{A})=2$, $R(\mathbf{B})=3$, 方程组无解; (6 分)

(2) 当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})=3$, 方程组有唯一解; (7 分)

(3) 当 $\lambda = 1$ 时, $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})=1$, 方程组有无穷多解; (8 分)

这时

$$\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9 \text{ 分})$$

由此便得通解 $x_1 = -2 - x_2 - x_3$ (x_2, x_3 可任意取值) (10 分)

$$\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad (12 \text{ 分})$$

6. 设四元非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵的秩 $R(\mathbf{A})=3$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的三个解向量, 且 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 求 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解. (8 分)

解: 已知方程组是 4 元, 且 $R(\mathbf{A})=3$, $4-3=1$, 则由非齐次线性方程组解的结构知, 导出组的基础解系中仅含有一个向量, 设为 $\boldsymbol{\xi}$ (3 分)

$$\boldsymbol{\xi} = 2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) = (2, 4, 6, 8)^T - (2, 3, 4, 5)^T = (0, 1, 2, 3)^T \quad (6 \text{ 分})$$

又因为非齐次线性方程组有特解 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 2, 3, 4)^T$ (7 分)

则非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_1 + k\boldsymbol{\xi}$, $k \in \mathbf{R}$ (8 分)

7. 已知 R^3 的两个基为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 及 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ 求 (1) 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P ;

(2) 求 x 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标. (12 分)

解: (1) 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 由矩阵方程 $AP = B$ 知, 用矩阵的初等行变换把矩阵 (A, B) 中的 A 变成 E , 则 B 相应地变成 P . (2 分)

$$\begin{aligned} (A, B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{于是, 过渡矩阵 } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 首先求 P^{-1} ,

$$\begin{aligned} (P|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 13 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & -11 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$

那么向量 $\mathbf{x}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

即向量 $\mathbf{x}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 13, -3, -2. (12 分)

8. 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (9 分)

$$\text{解: } \mathbf{A} \text{ 的特征多项式为 } |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 (3-\lambda)$$

所以 $\mathbf{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$ (4 分)

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (0, 0, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (7 分)

当 $\lambda_3 = 3$ 时, 解方程 $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由

$$A-3E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$) . (9 分)