

《概率论与数理统计》模拟试卷 5 参考答案

一、单选题.

1. 设 A, B 互不相容, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 则必有 (C).

A. $P(B|A) > 0$

B. $P(A|B) = P(A)$

C. $P(A|B) = 0$

D. $P(AB) = P(A)P(B)$

2. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为总体 $N(1, 2^2)$ 的一个样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则下列结论中正确的是 (D).

A. $\frac{\bar{X} - 1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$

B. $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 \sim F(n, 1)$

C. $\frac{\bar{X} - 1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

D. $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 \sim \chi^2(n)$

3. 若随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布, ① X, Y 一定相互独立; ② 若 $\rho_{XY} = 0$, 则 X, Y 一定相互独立; ③ X 和 Y 都服从一维正态分布; ④ 若 X, Y 相互独立, 则 $\text{Cov}(X, Y) = 0$. 以上几种说法中正确的是 (B).

A. ① ② ③ ④

B. ② ③ ④

C. ① ③ ④

D. ① ② ④

4. 设随机变量 X, Y 相互独立且 $D(X) = 4, D(Y) = 2$, 则 $D(3X - 2Y) =$ (D).

A. 8

B. 16

C. 28

D. 44

5. 设随机变量 $X \sim N(1, 2^2)$, $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ 是来自 X 的样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 已知 $Y = a\bar{X} + b$, 且 $Y \sim N(0, 1)$, 则有 (B).

A. $a = -5, b = -5$

B. $a = 5, b = -5$

$$C. a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{5}$$

$$D. a = -\frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}$$

二、填空题.

1. 四个人独立地破译一份密码, 已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则密码能被译出的概率是 0.8.

2. 若随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立服从同一分布, 且数学期望为

$$\mu, \text{ 方差为 } \sigma^2, \text{ 设 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 则 } E\bar{X} = \underline{\mu}, D\bar{X} = \underline{\frac{\sigma^2}{n}}.$$

3. 设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立, 则 $\frac{X}{\sqrt{Y}} \sqrt{n} \sim \underline{t(n)}$.

4. 已知正常男人血液中, 每一毫升中白血细胞的平均数为 7300, 均方差为 700, 则由切比雪夫不等式可知, 每毫升含白细胞数在 5200 ~ 9400 之

$$\text{间的概率 } P \text{ 满足: } \underline{\frac{8}{9}}.$$

5. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 令 $Y = -2X$, 则 Y 的概率密度

$$f_Y(y) \text{ 为 } \underline{\frac{1}{2} f_X(-\frac{1}{2}y)}.$$

三、证明题.

1. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X = (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j}\} = \frac{2}{3^j}, j = 1, 2, \dots$, 证明 X 的

数学期望不存在.

证明: 因为级数

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j} P\{X = (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j}\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j} \frac{2}{3^j} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}, \end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{j} > \frac{1}{j+1} \text{ 且 } \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} = 0,$$

由莱布尼判别法知交错级数 $2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ 收敛.

而调和级数 $2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ 发散, 所以由期望的定义知 X 的数学期望不存在.

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})y, & x \geq 0, 0 \leq y \leq 1, \\ 1 - e^{-ax}, & x \geq 0, y > 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad a > 0$$

2. 设随机变量 (X, Y) 具有分布函数,

证明: X, Y 相互独立.

证: 由边缘分布函数的定义得

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

即对 $\forall x, y$ 都有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$$

所以 X, Y 相互独立.

四、计算题.

1. 盒中放有 6 个乒乓球, 其中 2 个是旧的. 第一次比赛时从中任取 1 个来用, 比赛后仍放回盒中, 第二次比赛时再从盒中任取 1 个. (1) 求第二次取出的球是新球的概率. (2) 如果第二次取到的是新球, 求第一

次取到的新球的概率.

解: A_i ($i=1,2$) 表示第 i 次取到的是新球, 则 $A_1, \bar{A}_1$ 为样本空间的一个划分, 由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \approx 0.556 \end{aligned}$$

又由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned} P(A_1 | A_2) &= \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)} \\ &= \frac{P(A_1)P(A_2 | A_1)}{P(A_2)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} = 0.6. \end{aligned}$$

2. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \theta > -1.$$

($X_1, X_2, \dots, X_n$) 是来自 X 的样本, 求未知参数 θ 的最大似然估计.

解: 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n (1+\theta)x_i^\theta = (1+\theta)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\theta \quad (0 < x_i < 1),$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n \ln(1+\theta) + \theta \ln \prod_{i=1}^n x_i,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{1+\theta} + \ln \prod_{i=1}^n x_i = 0, \text{ 得}$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1.$$

又

$$E(X) = \int_0^1 x(1+\theta)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2},$$

令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E(X),$$

得

$$\hat{\theta}_{\text{矩}} = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}.$$

3. 随机抽取某种炮弹 9 发做实验，测得炮口速度的样本标准 $S = 3(m/s)$ ，

设炮口速度服从正态分布，求这种炮弹的炮口速度的方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间.

(已知: $\chi^2_{0.025}(8) = 17.535$, $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$; $\chi^2_{0.025}(9) = 19.02$, $\chi^2_{0.975}(9) = 2.7$)

解: 设表示炮口速度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 μ, σ^2 未知, $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 表示 X

的样本, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别为样本均值和方差.

取枢轴量为 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, 则 $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$.

又由

$$P\{\chi^2_{0.025}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0.975}(n-1)\} = 0.95$$

得方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)} \right),$$

将数据 $n=9, S=3$ 代入得所求置信区间为 $(4.106, 33.028)$.

4. 正常人的脉搏平均为 72 次/分，今对某种疾病患者 9 人，测得其脉搏为（次/分）：68 65 77 70 64 69 72 62 71. 设患者的脉搏次数 X 服从正态分布，经计算得其标准差为 4.583. 试在显著水平 $\alpha=0.1$ 下，检测患者的脉搏与正常人的脉搏有无显著差异？

(已知： $t_{0.05}(9)=1.833$, $t_{0.05}(8)=1.860$ $z_{0.05}=1.645$, $z_{0.025}=1.960$)

解：设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ, σ^2 未知，提出假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 72, H_1: \mu \neq \mu_0 = 72.$$

取检验统计量为

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

拒接域为

$$|t| \geq t_{0.05}(8) = 1.860,$$

代入数据计算得

$$t = \left| \frac{68.67 - 72}{4.583 / \sqrt{9}} \right| \approx 2.182 > 1.86,$$

所以在该显著水平下拒接原假设，即认为检测患者的脉搏与正常人的脉搏有显著差异.

5. 下表数据是退火温度 $x(^{\circ}\text{C})$ 对黄铜延性 Y 效应的实验结果， Y 是以延长度计算的.

$x(^{\circ}\text{C})$	300	400	500	600	700
$y(\%)$	40	50	55	60	67

求 Y 对于 x 的线性回归方程.

解：设黄铜延性 Y 对退火温度 x 的直线回归方程为

$$Y = a + bx,$$

记

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)^2,$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right) \left(\sum_{i=1}^5 y_i \right),$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^5 y_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 y_i \right)^2,$$

$$\text{其中, } \bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i,$$

代入数据计算得

$$\bar{x} = 500, \bar{y} = 54.4, \quad \hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{6400}{100000} = 0.064, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 22.4$$

所以售价 y 对楼盘面积 x 的直线回归方程为

$$Y = 22.4 + 0.064x.$$