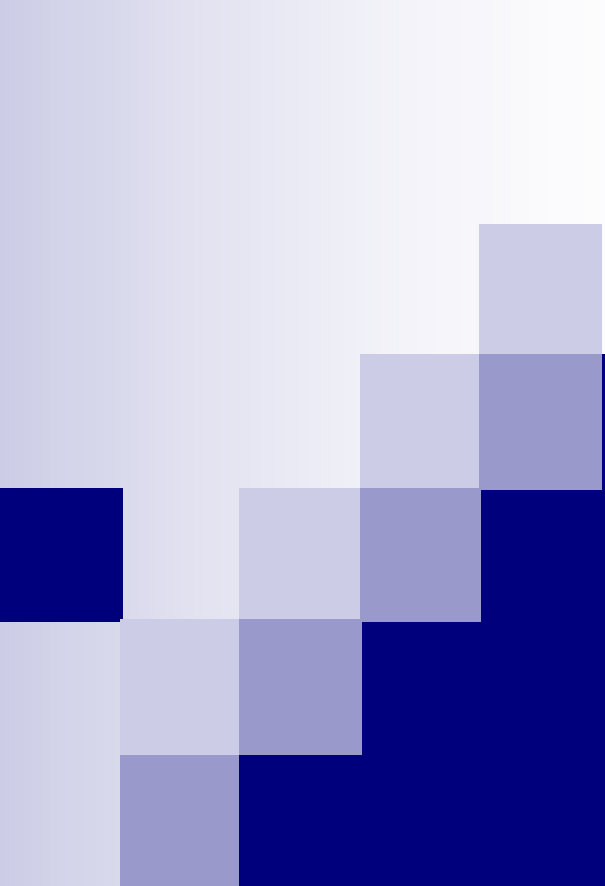




第四章

向量组的线性相关性



第一节 向量组及其线性组合



第二节 向量组的线性相关性



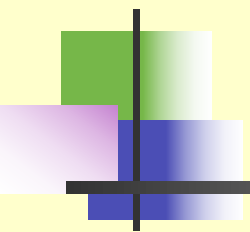
第三节 向量组的秩



第四节 线性方程组的解的结构



第五节 向量空间



§ 1 向量组及其线性组合

定义： n 个有次序的数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 所组成的数组称为 **n 维向量**，这 n 个数称为该向量的 n 个**分量**，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量。

□ 分量全为实数的向量称为**实向量**。

□ 分量全为复数的向量称为**复向量**。

备注：

✓ 行向量和列向量总被看作是两个不同的向量。

✓ 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量。

✓ 本书中，列向量用黑色小写字母 a, b, α, β 等表示，行向量则用 $a^T, b^T, \alpha^T, \beta^T$ 表示。

定义1: 若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合称为
向量组.

✓ 当 $R(A) < n$ 时，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的全体解组成的向量组含有无穷多个向量.

$$A_{34} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

有限向量组

结论: 含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

回顾：线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 向量方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组有解? $\iff$ 向量 $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是否能用 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性表示?

定义2: 给定向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$, 对于任何一组实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 表达式

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m$$

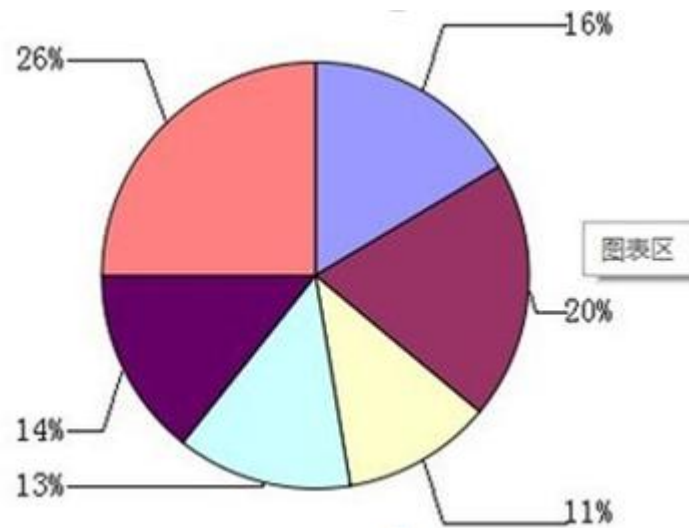
称为向量组 A 的一个线性组合.

$k_1, k_2, \dots, k_m$ 称为这个线性组合的系数.

向量组之间的线性表示

315调查显示：

房屋质量不过关让消费者最不能忍受，所占比例26%



向量组之间的线性表示

作为房屋质量问题，最突出的就是混凝土的质量



向量组之间的线性表示

【问题的给出】一个混凝土生产企业可以生产出三种型号不同的混凝土，他们具体的配方比例如下表所示：

	型号1混凝土	型号2混凝土	型号3混凝土
水	10	10	10
水泥	22	26	18
沙子	32	31	29
石头	53	64	50
煤炭灰	0	5	8

问：现在有用户要求混凝土中含水，水泥，沙子，石头，煤炭灰的比例分别为：24，52，73，133，12，那么，能否用这三种混凝土配出满足其要求的混凝土那？

向量组之间的线性表示

【**关系建立**】根据上述表格和向量的表示方法，我们首先将三种型号的混凝土分别表示为

	型号1混 泥土	型号2混 泥土	型号3混 泥土
水	10	10	10
水泥	22	26	18
沙子	32	31	29
石头	53	64	50
煤炭灰	0	5	8

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 32 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 31 \\ 64 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 29 \\ 50 \\ 8 \end{pmatrix}$$

向量组之间的线性表示

【关系建立】

则客户要求的混凝土是否能被这三种型号的混凝土表示的问题就转换成

$$b_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 52 \\ 73 \\ 133 \\ 12 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 32 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 31 \\ 64 \\ 5 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 29 \\ 50 \\ 8 \end{pmatrix}$$

简记为

$$b_1 = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$$

问：现在有用户要求混凝土中含水，水泥，沙子，石头，煤炭灰的比例分别为：24，52，73，133，12，那么，能否用这三种混凝土配出满足其要求的混凝土那？

向量组之间的线性表示

【概念引出】 向量的线性表示

定义3 给定向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量 b 如果存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$b = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

则向量 b 是向量组A的线性组合, 这时称 b 能由向量组A线性表示.

刚才的表达式 $b_1 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ 如果能够成立

则说明 b_1 能够由向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性表示

例：设 $E = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e_1, e_2, e_3 的
线性组合

那么 $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{2e_1 + 3e_2 + 7e_3}$

线性组合的系数

一般地，对于任意的 n 维向量 b ，必有

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

向量组之间的线性表示

向量 b 能由向量组 A 线性表示，等价于方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$$

有解.

由线性方程组有解的充分必要条件，可得如下结论

向量组之间的线性表示

【向量组线性表示的充分必要条件是】

定理1 向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示的

充分必要条件是矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩等于矩阵

$B = (A, b) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, b)$ 的秩.

向量组之间的线性表示

总结

问题:

向量的线性表示

$$b = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

方程组有解

解决途径:

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 的秩

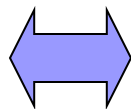
$B = (A, b) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, b)$ 的秩

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m$$

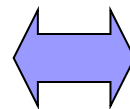
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = b$$

向量 b 能由
向量组 A
线性表示



线性方程组
 $Ax = b$
有解



$$R(A) = R(A, b)$$

向量组之间的线性表示

设原问题对应的增广矩阵为B

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1) = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 24 \\ 22 & 26 & 18 & 52 \\ 32 & 31 & 29 & 73 \\ 53 & 64 & 50 & 133 \\ 0 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

MAILAB desktop keyboard shortcuts, such as Ctrl+S, are now customizable. In addition, many keyboard shortcuts have changed for improved consistency across the desktop.

To customize keyboard shortcuts, use [Preferences](#). From there, you can also restore previous default settings by following the steps outlined in [Help](#).

[Click here](#) if you want to see this message again.

U =

1.0000	0	0	0.6000
0	1.0000	0	0.8000
0	0	1.0000	1.0000
0	0	0	0
0	0	0	0

f_x >> |

I

初等行变换

则 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

由此我们得到结果，刚才用户的需求能满足，所用型号
1-3三种混凝土的比例为：0.6：0.8：1

向量组之间的线性表示

【问题的提升】还有一个混凝土生产企业，也可以生产出三种不同型号的混凝土，他们具体的配方表如下表所示：

	型号1混泥土	型号2混泥土	型号3混泥土
水	12	8	9.5
水泥	26.4	20.8	17.1
沙子	38.4	24.8	27.55
石头	63.6	51.2	47.5
煤炭灰	0	4	7.6

分析，第二家生产的这三种混凝土是否可以代替第一家企业的那三种？

向量组之间的线性表示

【问题分析】 设第二家生产的三种型号的混凝土分别表示为

	型号1混凝土	型号2混凝土	型号3混凝土
水	12	8	9.5
水泥	26.4	20.8	17.1
沙子	38.4	24.8	27.55
石头	63.6	51.2	47.5
煤炭灰	0	4	7.6

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 26.4 \\ 38.4 \\ 63.6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 20.8 \\ 24.8 \\ 51.2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 17.1 \\ 27.55 \\ 47.5 \\ 7.6 \end{pmatrix}$$

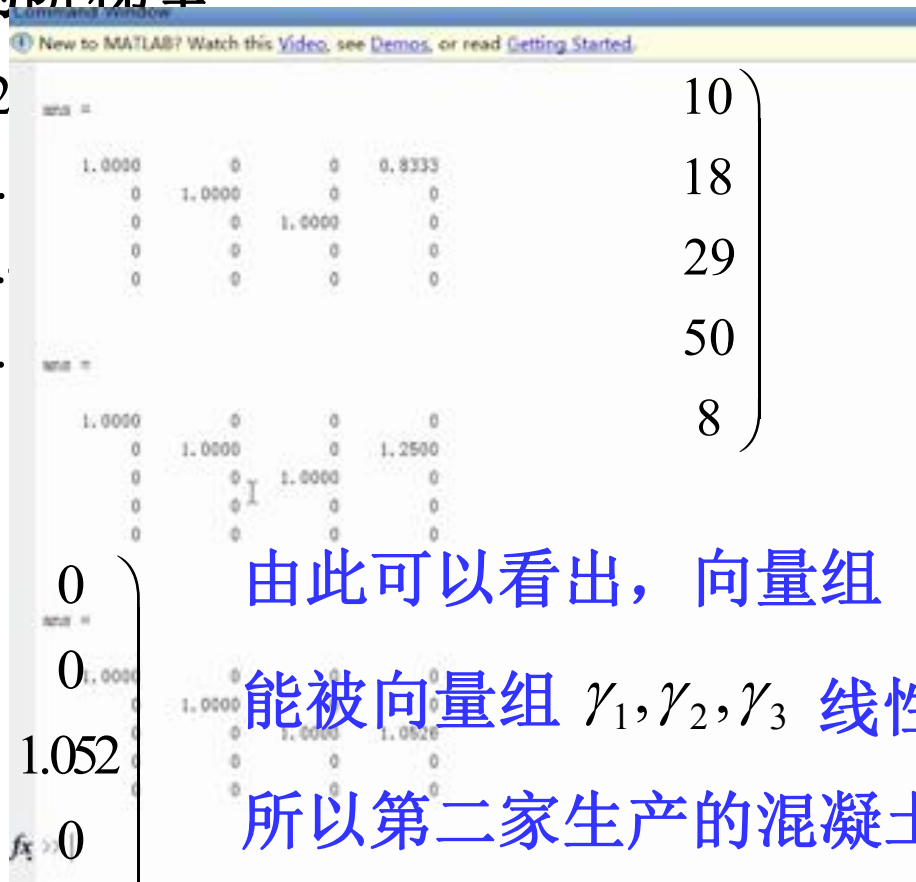
则该问题转换为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能否被向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性表出的问题.

向量组之间的线性表示

分别对矩阵 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_2), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_3)$

进行初等行变换化为阶梯型

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & & & & & 10 \\ 26. & & & & & 18 \\ 38. & & & & & 29 \\ 63. & & & & & 50 \\ 0 & & & & & 8 \end{pmatrix}$$



初等行变换
→

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.833 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.052 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可以看出，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

能被向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性表示.

所以第二家生产的混凝土可以代替第一家的.

向量组之间的线性表示

【概念提升】向量组的线性表示

定义4 设有两个向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及B: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$

若B组中每个向量都能由向量组A线性表示, 则称向量组B能由向量组A线性表示.

刚才的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 能将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出的问题, 就是

$$r(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = r(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

如果继续提问, 第一家企业可以代替第二家企业吗?

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

向量组之间的线性表示

【向量组的线性表示的充分必要条件】

定理1 向量组**B**: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ 能由 向量组**A**: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

线性表示的充分必要条件是矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩

等于矩阵 $(A, B) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_l)$ 的秩

推论: 向量组**A**与 向量组**B**等价的充分必要条件是

$$r(A) = r(B) = r(A, B)$$

设有向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \dots, b_l$, 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 即

$$(b_1 \quad \quad \quad) = (a_1, a_2, \dots, a_m) \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}$$

线性表示的
系数矩阵

设有向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \dots, b_l$, 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 即

- 对于 b_1 , 存在一组实数 $k_{11}, k_{21}, \dots, k_{m1}$, 使得

$$b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \dots + k_{m1}a_m ;$$

- 对于 b_2 , 存在一组实数 $k_{12}, k_{22}, \dots, k_{m2}$, 使得

$$b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \dots + k_{m2}a_m ;$$

.....

- 对于 b_l , 存在一组实数 $k_{1l}, k_{2l}, \dots, k_{ml}$, 使得

$$b_l = k_{1l}a_1 + k_{2l}a_2 + \dots + k_{ml}a_m$$

若 $C_{m \times n} = A_{m \times l} B_{l \times n}$ ，即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则 $(c_1, c_2, \cdots, c_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_l) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$

结论：矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示， B 为这一线性表示的系数矩阵。

向量组 $B: b_1, b_2, \dots, b_l$ 能由向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示

$\longleftrightarrow$ 存在矩阵 K , 使得 $AK = B$

$\longleftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 有解

$\longleftrightarrow R(A) = R(A, B)$ (P.84 定理2)

$\longrightarrow R(B) \leq R(A)$ (P.85 定理3) 因为 $R(B) \leq R(A, B)$

推论: 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \dots, b_l$ 等价的充分必要条件是 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

证明: 向量组 A 和 B 等价

$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{向量组 } B \text{ 能由向量组 } A \text{ 线性表示} \longleftrightarrow R(A) = R(A, B) \\ \text{向量组 } A \text{ 能由向量组 } B \text{ 线性表示} \longleftrightarrow R(B) = R(A, B) \end{array} \right.$

从而有 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

例1: 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

证明向量 b 能由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示, 并求出表示式.

解: 向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示当且仅当 $R(A) = R(A, b)$.

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A) = R(A, b) = 2$, 所以向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

通解为
$$x = c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c + 2 \\ 2c - 1 \\ c \end{pmatrix}$$

所以 $b = (-3c + 2) a_1 + (2c - 1) a_2 + c a_3$.

例2: 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

问: 向量 b 能否由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示?

解: 向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示当且仅当 $R(A) = R(A, b)$.

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & 4 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right)$$

因为 $R(A) = 2$, $R(A, b) = 3$, 所以向量 b 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

例3: 设向量组 A : $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

和设向量组 B : $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

证明: 向量组 A 和向量组 B 等价.

解：令矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$,

请回答： 1. 向量组的等价指的是什么形式的矩阵方程成立？

$$AX = B \qquad BY = A$$

2. 两个向量组等价的解决方法是？

$$R(A) = R(B) = R(A, B)$$

解：令矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3 \mid b_1, b_2, b_3)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

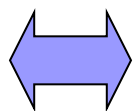
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

结论是： $R(A) = R(B) = R(A, B)$ 对吗？

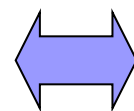
结论应该怎么修正： $R(A) = R(A, B)$ 还应该继续怎么办？

课堂小结

向量 b 能由
向量组 A
线性表示

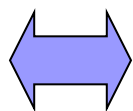


线性方程组
 $Ax = b$
有解

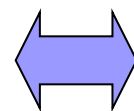


$$R(A) = R(A, b)$$

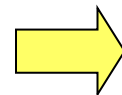
向量组 B 能
由向量组 A
线性表示



矩阵方程组
 $AX = B$
有解

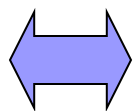


$$R(A) = R(A, B)$$



$$R(B) \leq R(A)$$

向量组 A 与
向量组 B
等价



$$R(A) = R(B) = R(A, B)$$

知识结构图

