

# 第一章 行列式

二阶与三阶行列式

全排列和对换

$n$ 阶行列式的定义

行列式的性质

行列式按行（列）展开

# 第一章 行列式

在初等数学中,我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组,可以看出,线性方程组的解完全由未知量的系数与常数项所确定.

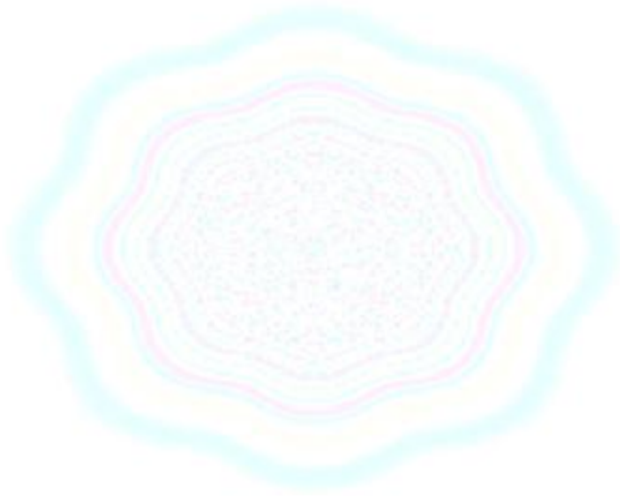
为了更清楚地表达线性方程组的解与未知量的系数和常数项的关系,我们在本章先引入二阶和三阶行列式的概念,并在二阶和三阶行列式的基础上,给出  $n$  阶行列式的定义并讨论其性质,进而把  $n$  阶行列式应用于解  $n$  元线性方程组.

# 第一节 二阶与三阶行列式

## 主要内容

- 二阶行列式
- 三阶行列式
- 举例

行列式是一种常用的数学工具，在数学及其他学科中都有着广泛的应用。



# 一、引例

行列式  
运算

矩阵  
运算

向量  
运算

方程组  
求解

测试  
系统

实验  
系统

数学家孙子在《孙子算经》中记载了“鸡兔同笼”问题

今有鸡兔同笼  
上有三十五头  
下有九十四足  
问鸡兔各几何？



上页

下页

返回

今有鸡兔同笼  
上有三十五头  
下有九十四足  
问鸡兔各几何？

假设鸡有 $x$ 只, 兔子有 $y$ 只？

$$x+y=35$$

&lt;

$$2x+4y=94$$



# 明代数学家程大位的《算法统宗》里有一道著名算题

行列式

矩阵运算

向量

方程组

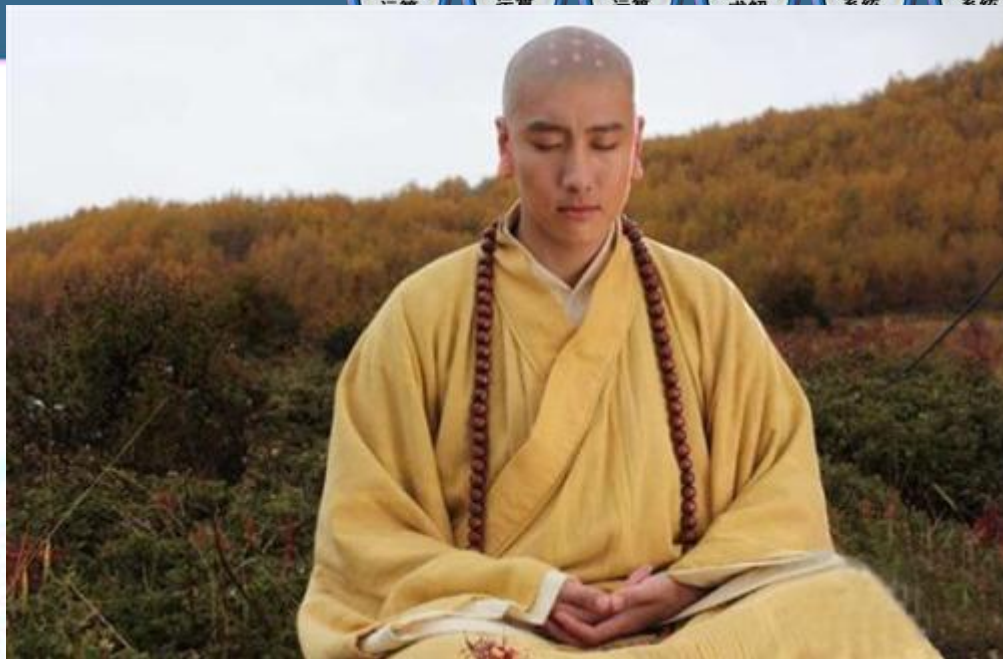
测试

实验系统

一百馒头一百僧  
大僧三个更无争  
小僧三人分一个  
大小和尚各几丁？



一百馒头一百僧  
大僧三个更无争  
小僧三人分一个  
大小和尚各几丁？



假设大和尚有 $x$ 人，小和尚有 $y$ 人。

$$x + y = 100$$

$$3x + \frac{1}{3}y = 100$$



考虑二元一次线性方程组 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

为消去  $x_2$ ，用  $a_{22}$  和  $a_{12}$  分别乘方程的左右两边，  
然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同理，消去  $x_1$ ，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  得方程组的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

当方便叙述和记忆，利用二阶行列式的定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

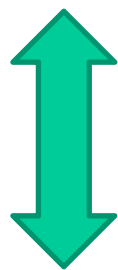
于是，当  $D \neq 0$  时，方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$



$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$



$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

进一步认识，分子分母的构成

$$\begin{cases} \underline{a_{11}}x_1 + \underline{a_{12}}x_2 = \underline{b_1} \\ \underline{a_{21}}x_1 + \underline{a_{22}}x_2 = \underline{b_2} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是，当  $D \neq 0$  时，方程组的解为  $x_1 = \frac{D_1}{D}$   $x_2 = \frac{D_2}{D}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$D \neq 0$  方程组的解为

$$\frac{D_1}{D} \quad \frac{D_2}{D}$$

三元一次线性方程组

是否都成立？

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

n元  
一次  
线性  
方程  
组



## 科普小知识



克莱默(Cramer, Gabriel,  
1704.7.31-1752.1.4)瑞士数学家。他  
一生未婚，专心治学，平易近人且  
德高望重。

主要著作是《代数曲线的分析引论》  
(1750)，首先定义了正则、非正则、超越曲线和无理曲线等概念。  
为了确定经过5 个点的一般二次曲线的系数，应用了著名的“克莱  
默法则”，即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。

## 二、二阶行列式

行列式  
运算

矩阵  
运算

向量  
运算

方程组  
求解

测试  
系统

实验  
系统

为了记忆该公式，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并称之为**二阶行列式**。其中  $a_{ij}$  称为行列式的**元素**， $a_{ij}$  的两个下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标称为**行标**，表示该元素所在的行，第二个下标称为**列标**，表示该元素所在的列，常称  $a_{ij}$  为行列式的 **$(i, j)$  元素或元**。

上页

下页

返回

## 二阶行列式的计算——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

若记

系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

# 例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解  $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

## 三、三阶行列式

**引例** 用消元法解关于  $x, y, z$  三元线性方程组

$$\begin{cases} ax + by + cz = d, \\ ex + fy + gz = h, \\ ix + jy + kz = l. \end{cases}$$

为了记忆三元线性方程组的求解公式, 可引入三阶行列式. 三阶行列式的定义如下:

**定义** 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

(1)

记 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \quad (2)$$

(2) 式称为数表 (1) 所确定的三阶行列式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

列标  
行标

## 三阶行列式的计算

(1) 沙路法

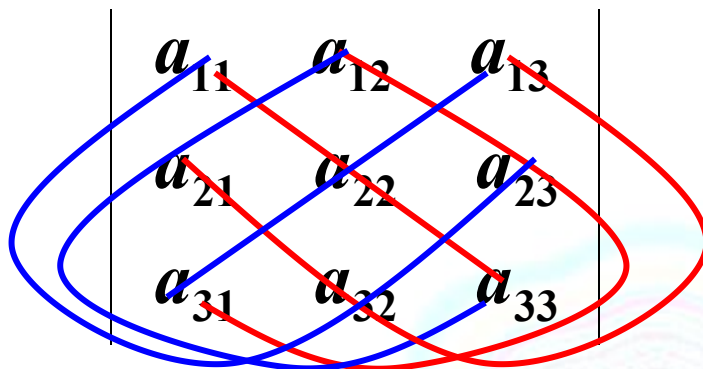
$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$

$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

## (2) 对角线法则



$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

**注意** 红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号。

**说明1** 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式。

2. 三阶行列式包括 $3!$ 项, 每一项都是位于不同行, 不同列的三个元素的乘积, 其中三项为正, 三项为负.

## 利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

的系数行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## 四、举例

### 例1 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

## 例2 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

## 五、小结

1.二阶和三阶行列式是由解二元和三元线性方程组引入的.

2.二阶与三阶行列式的计算——对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$