

《概率论与数理统计》模拟试卷 15 参考答案

一、判断题.

- (√) 1. 事件 A, B 独立, 则 $\bar{A}, \bar{B}$ 也独立.
- (×) 2. 若三个事件 A, B, C 两两独立, 则 A, B, C 相互独立.
- (√) 3. 若随机变量 X, Y 相互独立的, 则相关系数 $\rho_{XY} = 0$.
- (×) 4. 无记忆性是几何分布的特征.
- (×) 5. 概率为1的事件, 一定是必然事件.
- (√) 6. 估计量是用于估计未知参数的样本的函数.
- (√) 7. 二项分布的极限分布是正态分布.

二、填空题.

1. 设 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3$, 则 $P(A \cup B) = 0.52$.
2. 有一批产品共 40 件, 其中有 3 件为次品, 现从中任取两件, 则事件

$A = \text{“至少有一件次品”}$ 的概率 $P(A) = \frac{19}{130}$ 或 0.146.

3. 当 $C = \frac{1}{2}$ 时, $P\{X = k\} = C \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$ ($k = 1, 2, \dots$) 才能成为随机变量.
4. 若 X 和 Y 相互独立, $D(X) = 2, D(Y) = 3$, 则 $D(2X - 3Y) = 35$.
5. 估计量的优良性包括无偏性、有效性和相合性(或一致性).

三、选择题.

1. 设 A 与 B 互斥, $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则下列结论正确的是 (B) .
- A. $P(A|B) = P(A)$ B. $P(A|B) = 0$ C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P(B|A) > 0$
2. 对于两个随机事件 A 与 B , 则与 $A \cup B = B$ 不等价的是 (D) .
- A. $A \subset B$ B. $\bar{B} \subset \bar{A}$ C. $A\bar{B} = \phi$ D. $\bar{A}B = \phi$
3. 当 X 的可能值充满 (A), 则 $\varphi(x) = \cos x$ 可成为 X 的分布密度.
- A. $[0, \frac{\pi}{2}]$ B. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ C. $[0, \pi]$ D. $[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$
4. 已知 $X \sim N(0, 1)$, 则 $Y = X^2$ 的数学期望为 (C) .

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B(10, 0.3)$, $Y \sim N(10, 0.4)$, 则

$$E(2X - Y)^2 = (\quad B \quad).$$

- A. 12.6 B. 14.8 C. 15.2 D. 18.9

6. 设 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $D(X) = \sigma^2$, 则 $P\{|X - \mu| \geq 6\sigma\} \leq (\quad C \quad)$.

- A. $1/6$ B. $(1/6)\sigma^2$ C. $1/36$ D. $(1/36)\sigma^2$

7. 设子样 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X , $\bar{X}$ 为样本均值, 则不是总体期望 μ 的无偏估计量的是 (A).

- A. $\sum_{i=1}^n x_i$; B. $\bar{X}$; C. $0.2X_1 + 0.3X_2 + 0.5X_3$; D. $X_1 + X_2 - X_3$.

四、计算题.

1. 设总体 $X \sim N(2, 4)$, 随机抽取容量为 16 的样本, 求 (1) 样本均值 $\bar{X}$ 的

分布; (2) $P(1 < \bar{X} < 3)$. $(\Phi(2) = 0.9972)$

解: 因为 $X \sim N(2, 4)$, 即 $\mu = 2$, $\sigma^2 = 4$,

$$\text{由 } n = 16, \text{ 得 } \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{16} = 0.25 = (0.5)^2$$

$$\text{所以, } \bar{X} \sim N(2, (0.5)^2)$$

$$\begin{aligned} P(1 < \bar{X} < 3) &= \Phi\left(\frac{3-2}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{0.5}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) \\ &= 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9972 - 1 \\ &= 0.9944 \end{aligned}$$

2. 设 (X, Y) 有联合分布密度为: $f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(4x+3y)}, & (x > 0, y > 0) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,

求 (1) 常数 A ; (2) 边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(3) X 与 Y 是否相互独立?

解： (1) $1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} A e^{-(4x+3y)} dx dy = \frac{A}{12}, \therefore A = 12$

(2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(3) $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 所以 X, Y 相互独立。

3. 若某型号保险丝的熔化时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从一批同类保险丝中随机抽取 9 根, 测得熔化时间的样本均值为 $\bar{x} = 56.32$, 样本方差 $s^2 = (0.22)^2$, 求 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间?

($\chi^2_{0.025}(8) = 17.534$, $\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$, $\chi^2_{0.95}(8) = 2.733$, $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$)

解: $\bar{x} = 56.32$, $s^2 = 0.0484$, $n = 9$, $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$,

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(8) = 17.534$; $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(8) = 2.18$

置信下限: $\underline{\theta} = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{8 \times 0.0484}{17.534} = 0.022$;

置信上限: $\bar{\theta} = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{8 \times 0.0484}{2.18} = 0.178$;

所以, σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间 $(0.022, 0.178)$ 。

4. 已知高频管的某一指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现从中抽取 9 个, 测得样本均值 $\bar{x} = 61.5$, 样本方差 $s^2 = (8.428)^2$, 可否认为该指标的平均值为 60?

($\alpha = 0.05$) ($t_{0.005}(8) = 3.355$, $t_{0.025}(8) = 2.306$; $t_{0.05}(8) = 1.859$)

解: (1) 待检假设为: $H_0: \mu = 60 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 60$

(2) 已知: $n = 9$, $\bar{x} = 61.5$, $s^2 = (8.428)^2$, $s = 8.428$,

$$\therefore |T| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| = \left| \frac{61.5 - 60}{8.428} \times 3 \right| = 0.534$$

$$(3) \alpha = 0.05, \quad t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$$

(4) 由于 $|T| = 0.534 > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 2.306$ 不成立, 所以, 接受 H_0 , 即以认为该指标的平均值仍为 60。

5. 设随机变量 X 的概率密度为: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & (0 < x < 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 已知

$E(X) = 0.5$, $D(X) = 0.15$, 求系数 a 、 b 和 c ?

$$\text{解: 由 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c \quad (1)$$

$$0.5 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c \quad (2)$$

因为 $E(X) = 0.5$, $D(X) = 0.15$, 而 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\text{所以, } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 0.4$$

$$0.4 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 联立方程组, 可得: $a = 12$, $b = -12$, $c = 3$