

## 《线性代数》模拟试卷（三）答案

### 一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

- ( × ) 1. 21354 为偶排列.  
( √ ) 2. 交换行列式的两列，行列式的值变号.  
( √ ) 3.  $(AB)^T = B^T A^T$ .  
( × ) 4. 含有零向量的向量组线性无关.  
( √ ) 5. 若  $A, B, C$  为同阶矩阵，且  $A$  可逆，若有  $AB = AC$ ，则  $B = C$ .

### 二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1.  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\quad 5 \quad}$ .  
2. 设  $A$  为三阶矩阵，若已知  $|A| = -2$ ，求  $\|A\|A^2A^T\| = \underline{64}$ .  
3.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$ .  
4. 向量组  $\alpha_1 = (0, 1), \alpha_2 = (1, 0), \alpha_3 = (1, 1), \alpha_4 = (0, 2)$  的秩为 2.

### 三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 行列式  $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$  的充分必要条件是 ( D )  
A.  $k = 1$       B.  $k = 3$       C.  $k \neq 1$  且  $k \neq 3$       D.  $k = 1$  或  $k = 3$   
2. 下列选项中不属于五阶行列式  $|a_{ij}|$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 5$ ) 中的一项是 ( A )  
A.  $a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$       B.  $-a_{51}a_{12}a_{43}a_{34}a_{25}$       C.  $-a_{13}a_{52}a_{34}a_{21}a_{45}$       D.  $a_{55}a_{44}a_{33}a_{22}a_{11}$

3. 设  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -1$ , 则  $a =$  ( A )

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-1$                       D.  $1$

4. 有矩阵  $A_{3 \times 2}, B_{2 \times 3}, C_{3 \times 3}$ , 下列矩阵运算可行的是 ( B )

- A.  $AC$                       B.  $ABC$                       C.  $BAC$                       D.  $AB - BC$

5. 设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 下列结论错误的是 ( B )

- A.  $[(A^{-1})^{-1}]^T = [(A^T)^{-1}]^{-1}$                       B.  $[(A^T)^T]^{-1} = [(A^{-1})^{-1}]^T$   
C.  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$                       D.  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

6. 设  $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$ , 向量  $\beta = (-1, -1, 0)$  可表示为

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合:  $\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$ , 则 ( D )

- A.  $a = -1, b = -1, c = -1$                       B.  $a = 1, b = -1, c = -1$   
C.  $a = -1, b = 1, c = -1$                       D.  $a = -1, b = -1, c = 1$

7. 设  $C$  是  $m \times n$  矩阵, 若有矩阵  $A, B$ , 使  $AC = C^T B$ , 则  $A$  的行数  $\times$  列数为 ( B )

- A.  $m \times n$                       B.  $n \times m$                       C.  $m \times m$                       D.  $n \times n$

8. 设矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $Ax = 0$  有非零解的充分必要条件是 ( B )

- A.  $A$  的列向量组线性无关                      B.  $A$  的列向量组线性相关  
C.  $A$  的行向量组线性无关                      D.  $A$  的行向量组线性相关

#### 四、计算题 (共 50 分)

1. 计算行列式  $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$  的值. (6 分)

$$\text{解: 原式} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 分}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分}) = 40 \quad (6 \text{ 分})$$

2. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$  的秩  $r(A)=2$ , 求  $\lambda$ . (6 分)

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

若  $r(A)=2$ , 必有一行元素全为零, 第一、二行的元素不全为 0, 故第三行元素应全为 0, 因此  $\lambda=1$ . (6 分)

3. 解下列矩阵方程, 求出未知矩阵  $X$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . (8 分)

$$\text{解: } (A|I) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (1 \text{ 分}) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad (3 \text{ 分}) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分}), \text{ 所以 } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (8 \text{ 分})$$

4. 求齐次线性方程组的一个基础解系

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad (15 \text{ 分})$$

解：对方程组的增广矩阵施以初等行变换，化为简化的阶梯形矩阵：

$$(A|0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

可得  $r(A) = 3 < 5$ , (8 分) 所以方程组的基础解系中应含两个线性无关的解向量，并且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

其中  $x_4, x_5$  为自由未知量，令自由未知量  $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$  分别取  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，(12 分) 得原方程组的一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15 \text{ 分})$$

5. 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。(15 分)

解：矩阵  $A$  的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8) \quad (5 \text{ 分})$$

令  $|\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8) = 0$ ，得  $A$  的特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$ 。(7 分)

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ，解齐次线性方程组  $(-I - A)x = 0$ ，可得基础解系为

$\alpha_1 = (-1, 2, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$ ，(9 分) 所以  $A$  的对应于  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  的全部特征

向量为  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $c_1, c_2$  为不全为零的任意常数)。(11 分)

---

当  $\lambda_3 = 8$  时，解齐次线性方程组  $(-8I - A)x = 0$ ，可得基础解系为

$\alpha_3 = (2, 1, 2)^T$ 。(13 分) 所以

$A$  的对应于  $\lambda_3 = 8$  的全部特征向量为

$$c_3 \alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_3 \text{ 为任意常数}) \quad (15 \text{ 分})$$