

第三节 线性方程组的解

- 一、线性方程组有解的判定条件
- 二、线性方程组的解法
- 三、小结 思考题

一、线性方程组有解的判定条件

问题：如何利用系数矩阵 A 和增广矩阵 B 的秩，讨论线性方程组 $Ax = b$ 的解。

例1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

方程组的解

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$$

定理1 n 元齐次线性方程组 $A_{m \times n} x = 0$ 有惟一解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) = n$.

例2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

$$(A:b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

$$\text{令 } x_3 = c_1 \quad x_4 = c_2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}c_1 - \frac{13}{7}c_2 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}c_1 + \frac{4}{7}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

写成向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当 $r(A, b) = r(A) < n$ 时, 方程组有无穷多解。

定理2 n 元非齐次线性方程组 $A_{m \times n} x = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $B = (A, b)$ 的秩.

$R(A) = R(B) = n \Leftrightarrow Ax = b$ 有唯一解

$R(A) = R(B) < n \Leftrightarrow Ax = b$ 有无穷多解.

齐次线性方程组：系数矩阵化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

非齐次线性方程组：增广矩阵化成行阶梯形矩阵，便可判断其是否有解．若有解，化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

二、线性方程组的解法

例1 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} .$$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{r_3 - r_2}_{r_2 \div (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

由此即得
$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4, \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 可任意取值}).$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 把它写成通常的参数形式

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + \frac{5}{3}c_2, \\ x_2 = -2c_1 - \frac{4}{3}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例2 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解 对增广矩阵 B 进行初等变换,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_2 - 2r_1, r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

显然, $R(A) = 2, R(B) = 3$, 故方程组无解.

线性方程组无解的充分必要条件是 $r(A, b) \neq r(A)$

上页

下页

返回

例3 求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

解 对增广矩阵 B 进行初等变换

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $R(A) = R(B) = 2$, 故方程组有解, 且有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 + 0x_4 \\ x_3 = 0x_2 + 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = 0x_2 + x_4 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 x_2, x_4 任意.

例4 证明方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases} \quad \text{有解的充要条件}$$

是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$. 在有解的情况下, 求出它的一切解.

解证 对增广矩阵 B 进行初等变换,

方程组的增广矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^5 a_i \end{pmatrix}$$

$$\because R(A) = R(B)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 a_i = 0$$

$\therefore$ 方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^5 a_i = 0$.

由于原方程组等价于方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$$

由此得通解：

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5 \\ x_4 = a_4 + x_5 \end{cases}$$

(x_5 为任意实数).

例5 设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问 λ 取何值时,有解?有无穷多个解?

解 对增广矩阵 $B = (A, b)$ 作初等行变换,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 & 1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $\lambda = 1$ 时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(B) < 3$, 方程组有无穷多解 .

其通解为
$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

(x_2, x_3 为任意实数).

(2) 当 $\lambda \neq 1$ 时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

这时又分两种情形:

1) $\lambda \neq -2$ 时, $R(A) = R(B) = 3$, 方程组有唯一解:

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2) $\lambda = -2$ 时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$R(A) \neq R(B)$,故方程组无解.

三、小结

齐次线性方程组 $Ax = 0$

$R(A) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解；

$R(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$ 有非零解。

非齐次线性方程组 $Ax = b$

$R(A) = R(B) = n \Leftrightarrow Ax = b$ 有唯一解；

$R(A) = R(B) < n \Leftrightarrow Ax = b$ 有无穷多解。

思考题

讨论线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - px_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = t \end{cases}$$

当 p, t 取何值时, 方程组无解? 有唯一解?
有无穷多解? 在方程组有无穷多解的情况下, 求出一般解.

思考题解答

解

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -p & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & t \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -p-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & t-1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -p+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{array} \right)$$

(1) 当 $p \neq 2$ 时, $R(A) = R(B) = 4$, 方程组有唯一解;

(2) 当 $p = 2$ 时, 有

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{array} \right)$$

当 $t \neq 1$ 时, $R(A) = 3 < R(B) = 4$, 方程组无解;

当 $t = 1$ 时, $R(A) = R(B) = 3$, 方程组有无穷多解.

且

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_4 = 2, \end{cases}$$

故原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (k \in R).$$