

案例：信号的检测（假设检验）

引言：信号检测就是要能够确定感兴趣的信号在什么时候出现，然后确定该信号的更多信息。

考虑二元移键控（BPSK）系统。BPSK 系统是用来传输发射“0”或者“1”的数字数据源输出。数据位首先受到调制，然后被发射，而在接收机先解调，然后被检测。调制器将“0”转化成波形 $S_0(t) = \cos 2\pi F_0 t$ ，将“1”转换成波形 $S_1(t) = \cos(2\pi F_0 t + \pi) = -\cos 2\pi F_0 t$ ，以允许调制的信号通过中心频率为 F_0 的带通信道（如微波链路）传输，正弦信号的相位反映了发射的是“0”还是“1”。

现代信号处理系统使用数字计算机对一个连续的波形进行采样，并存储采样值，这样就等效成一个根据离散时间波形或数据集做出判决的问题。从数学上讲，有 N 点可用的数据集 $\{X[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ ，可形成数据函数 $T\{X[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ ，根据它来做出判决，确定函数 T ，把它映射成一个判决。

最简单的检测问题是在含有噪声的情况下确定信号是否存在，还是只有噪声。

检测方法：考虑一个高斯白噪声（WGN）中已知确定性信号的检测问题，检测问题要区分如下两种假设：

$$H_0: x[n] = w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_1: x[n] = s[n] + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中信号 $s[n]$ 假定是已知的， $w[n]$ 是方差为 σ^2 的 WGN，WGN 定义为零均值的高斯过程，自相关函数（ACF）为

$$\gamma_{ww}(k) = E(w[n]w[n+k]) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$\text{其中 } \delta(k) \text{ 是示性函数 } \delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

采用似然比检验，如果似然比超过门限，即

$$L(X) = \frac{P(X; H_1)}{P(X; H_0)} > \gamma$$

则拒绝 H_0 ，可以接受 H_1 ，其中 $X = (x[0], x[1], \dots, x[N-1])^T$

由于

$$P(X, H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2\right\}$$

$$P(X, H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]\right\}$$

故有

$$L(X) = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2 - \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]\right)\right] > \gamma$$

两边取对数，所以

$$l(X) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2 - \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]\right) > \ln \gamma$$

于是

$$\text{若} \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n] > \ln \gamma$$

则判 H_1 ,

由于 $s[n]$ 是已知的，由上式有：

$$T(X) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] > \sigma^2 \ln \gamma + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n]$$

将不等式的右边作为新的门限，如果

$$T(X) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] > \gamma' \quad (*)$$

则判 H_1 。

例：对某个已知电平 A ，假定 $s[n] = A$ ，其中 $A > 0$ ，由 $(*)$ 式， $T(X) = A \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$ 等效

的检测器为 $T(X)$ 除以 NA ，如果

$$T'(X) = \frac{1}{NA} T(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \bar{x} > \gamma'$$

讨论：似然比检验在信号检测中有广泛的应用，如可用上面的方法检验下面的问题。若接收机可能接收到 M 个信号，判断接收机接收到的是哪一个？等等。