

《概率论与数理统计》模拟试卷 9 参考答案

一、判断题.

1. 事件 A, B 独立当且仅当则 $\bar{A}, B$ 独立. (√)
2. 概率为 0 的事件, 一定是不可能事件. (×)
3. 对于任意的 X, Y 都有 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$. (×)
4. 统计量是不含未知参数的样本函数. (√)
5. 假设检验的方法是依据小概率事件原理. (√)

二、选择题.

1. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, , 则有 (A).
A. $P(A|B) = P(A)$ B. $P(B|A) = 0$
C. $P(A|B) = 0$ D. $P(AB) = P(A)$
2. 设 $X \sim N(1, 9)$, 要使 $P(X \leq C) = 1/2$, 则 $C =$ (D).
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 设 X 在 $[2, 4]$ 上服从均匀分布, 则 $E(4X + 3) =$ (B).
A. 9 B. 11 C. 13 D. 15
4. 设 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $\text{Var}(X) = \sigma^2$, 根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq$ (C).
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}\sigma^2$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{9}\sigma^2$
5. 若 $X \sim N(1, 4), Y \sim N(1, 9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ (D).
A. 2.4 B. 2.5 C. 2.6 D. 2.7

三、填空题.

1. 设 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6$, 则 $P(A \cup B) = \underline{0.8}$.
2. 设 $g(x) = \lambda e^{-3x}, x \geq 0$ 是概率密度, 则常数 $\lambda = \underline{3}$.
3. 设 $X \sim U(0, \frac{\pi}{2})$, 则 $E(\sin X) = \underline{\frac{2}{\pi}}$.
4. 设总体 $X \sim U(a, b)$, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 X 的样本, 则 a, b 的最大似然估计量分为 $\hat{a} = \underline{x_{(1)}}$ 和 $\hat{b} = \underline{x_{(n)}}$.
5. 估计量的优良性包括无偏性、有效性和相合性 (或一致性).

四、证明题.

1. 设 X 的 $\text{Var}(X) < \infty$, C 为常数, 证明: $\text{Var}(X) \leq E[(X - C)^2]$.

证: 因为: $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E[(X - C)^2] = E[X^2 - 2XC + C^2] = E(X^2) - 2E(X)C + C^2$$

$$\text{所以, } E[(X - C)^2] - \text{Var}(X) = [E(X)]^2 - 2E(X)C + C^2 = [E(X) - C]^2 \geq 0$$

$$\text{即 } E[(X - C)^2] \geq \text{Var}(X), \quad (\text{当且仅当 } E(X) = C \text{ 时取等号})$$

2. 设总体 X 的分布密度函数为:
$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

其中未知参数 $\theta > 0$. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本,

其观测值为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 且 $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

证明: θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} = \bar{x}$.

证：似然函数：

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x_i} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta} (\sum_{i=1}^n x_i)}$$

$$\text{似然函数取对数, } \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = n \ln \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} (\sum_{i=1}^n x_i)$$

对数似然函数求导并令导数为零，可得：

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[n \ln \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} (\sum_{i=1}^n x_i) \right] = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} (\sum_{i=1}^n x_i) = 0,$$
$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i) = \bar{x}$$

五、计算题.

1. 李教授要参加学术会议，他乘汽车、火车的概率分别是0.7和0.3，而汽车和火车晚点到达的概率分别是0.2和0.1，则李教授晚点到达的概率有多大？若已知李教授正点到达，则他是乘汽车的概率有多大？

解 设 A_1, A_2 分别表示“该人乘汽车、火车”， B 表示“正点到达”，

依题意可知：那么 A_1, A_2 构成一个完备事件组.

$$P(A_1) = 0.7 \quad P(A_2) = 0.3$$

$$P(B | A_1) = 0.8 \quad P(B | A_2) = 0.9$$

$$P(\bar{B} | A_1) = 0.2 \quad P(\bar{B} | A_2) = 0.1$$

由全概率公式可得： $P(\bar{B}) = P(A_1)P(\bar{B} | A_1) + P(A_2)P(\bar{B} | A_2)$

$$= 0.7 \times 0.2 + 0.3 \times 0.1$$

$$= 0.17$$

由贝叶斯公式知，李教授乘汽车的概率：

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1)P(\bar{B} | A_1)}{P(B)} = \frac{0.7 \times 0.8}{0.83} = 0.6747$$

2. 若尼龙绳断裂强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 $\sigma^2 = 100$ ，某日随机抽取 21 根测纤维度并经过计算得：样本方差 $s^2 = 169$ ，问该天生产纤维的总体方差是否有变化？（ $\alpha = 0.05$ ）

$$(\chi^2_{0.025}(20) = 34.170 \quad ; \quad \chi^2_{0.05}(20) = 31.410 \quad ;$$

$$\chi^2_{0.95}(20) = 10.851 \quad ; \quad \chi^2_{0.975}(20) = 9.591)$$

解：（1）待检假设为：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 (\sigma_0^2 = 100) \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 (\sigma_0^2 \neq 100)$$

$$(2) \quad \text{已知: } n = 21, \quad s^2 = 169, \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{20 \times 169}{100} = 33.8$$

$$(3) \quad \alpha = 0.05, \quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(20) = 34.170; \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(20) = 9.591$$

$$\text{故拒绝域为: } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 34.170 \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 9.591$$

$$(4) \quad \text{由于 } 9.591 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 33.8 < 34.170 \text{ 成立, 所以, 接受 } H_0, \text{ 即认为}$$

该天生产纤维的总体方差较以往的没有显著变化.

3. 设某厂生产的袋装糖果重量总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 与 σ^2 都未知，现从某天生产的一批糖果中随机抽取 16 袋进行测量（单位：克），并计算得到样本均值 $\bar{x} = 503.75$ ，样本方差 $s^2 = (6.2022)^2$ ，试求置信水平为 95% 的 μ 的置信区间？

$$(\quad t_{0.005}(15) = 2.9467; \quad t_{0.025}(15) = 2.1315; \quad t_{0.01}(15) = 2.6025 \quad)$$

解：已知： $n = 16$, $\bar{x} = 503.75$, $s = 6.2022$,

$$\alpha = 0.95, \quad t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.1315$$

所以，置信下限：

$$\underline{\theta} = \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 503.75 - 2.1315 \times \frac{6.2022}{\sqrt{16}} = 500.445$$

置信上限：

$$\bar{\theta} = \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 503.75 + 2.1315 \times \frac{6.2022}{\sqrt{16}} = 507.055$$

即所求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $[500.445, 507.055]$

4. 一公司销售的某种原料的市场需求 X （单位：吨）服从 $(300, 500)$ 上的均匀分布. 每售出 1 吨该原料，公司可获利 1.5 万元，而积压 1 吨，则公司损失 0.5 万元，问该公司应该组织多少货源，可使平均收益最大？

解：设公司组织货源 a 吨，显然 $300 \leq a \leq 500$. 又设 Y 为再 a 吨货源条件下的收益额，则 Y 为 X 的函数. 当 $X \geq a$ 时， a 吨货源全部售出，获利 $1.5a$. 当 $X < a$ 时，售出 X 吨（获利 $1.5X$ ），还有 $a - X$ 吨积压（获利 $-0.5(a - X)$ ），共获利 $1.5X - 0.5(a - X)$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以, } g(X) &= \begin{cases} 1.5a, & X \geq a \\ 1.5X - 0.5(a - X), & X < a \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1.5a, & X \geq a \\ 2X - 0.5a, & X < a \end{cases} \end{aligned}$$

由随机变量函数的数学期望公式可得：

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_X(x) dx = \int_{300}^{500} g(x) \frac{1}{200} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{200} \left\{ \int_{300}^a (2x - 0.5a) dx + \int_a^{500} 1.5a dx \right\} \\
&= \frac{1}{200} (-a^2 + 900a - 300^2) \\
&= \frac{1}{200} [-(a - 450)^2 + 450^2 - 300^2] \\
&= \frac{1}{200} [-(a - 450)^2] + 562.5.
\end{aligned}$$

即当 $a = 450$ 吨时，能使 $E(g(X))$ 达到最大值 562.5 千元.