

第一节 大数定律

一、问题的引入

二、基本定理

三、典型例题

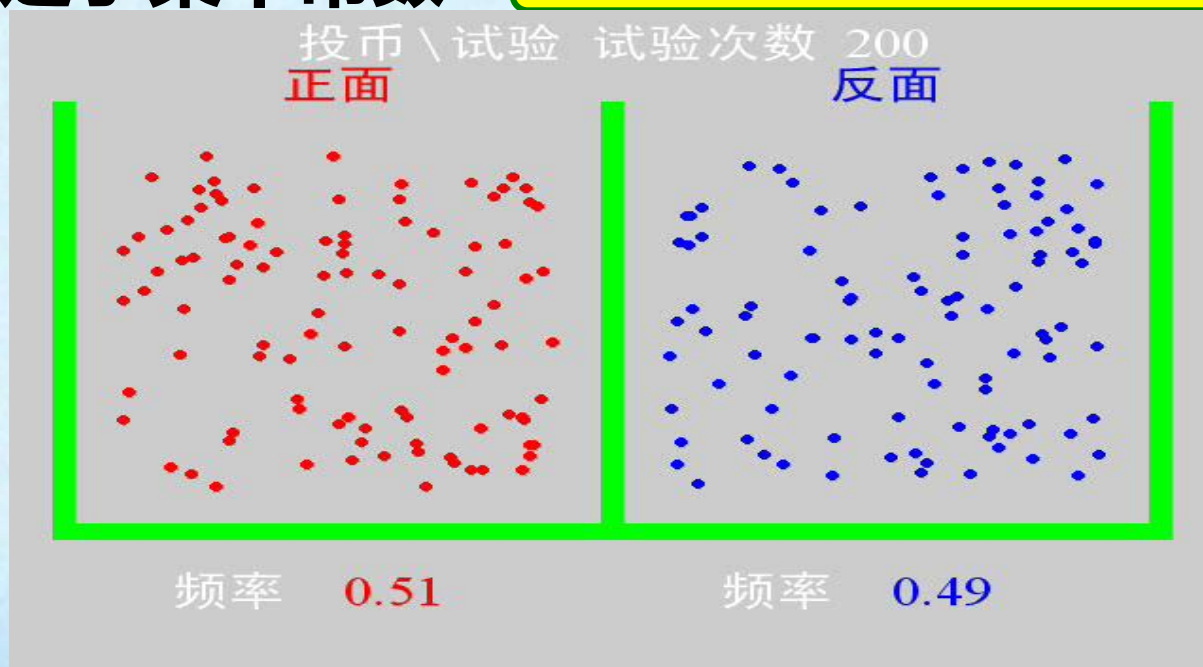
四、小结

一、问题的引入

实例 频率的稳定性

随着试验次数的增加, 事件发生的频率逐渐稳定于某个常数.

单击图形播放/暂停 ESC键退出



启示:从实践中人们发现大量测量值的算术平均值有稳定性.

二、基本定理

1. 弱大数定理（辛钦大数定理）

辛钦资料

$\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\}$ 是一个随机事件, 等式表明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时这个事件的概率趋于 1, 即对于任意正数 ε , 当 n 充分大时, 不等式 $|\bar{X} - \mu| < \varepsilon$ 成立的概率很大.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

证

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \cdot (n\mu) = \mu,$$
$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n D(X_k) = \frac{1}{n^2} \cdot (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n},$$

由切比雪夫不等式得

$$1 \geq P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}$$

在上式中令 $n \rightarrow \infty$, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad \text{证毕.}$$



说明

当 n 很大时, 随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的算术平均 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ 接近于数学期望

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_k) = \mu,$$

(这个接近是概率意义下的接近)

即在定理条件下, n 个随机变量的算术平均, 当 n 无限增加时, 几乎变成一个常数.



弱大数定理（辛钦大数定理）还可表述为：

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立，服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \dots)$ ，则序列 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ 依概率收敛于 μ ，即 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ 。

设 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ 是一个随机变量序列， a 是一个常数。若对于任意正数 ε ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ 依概率收敛于 a ，记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a.$$

定理一的另一种叙述:

设随机变量 $X_1, X_2, \dots$
 且具有相同的数学期望

$$D(X_k) = \sigma^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

依概率收敛于 μ , 即 $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

设 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 是一个随机变量序列, a 是一个常数, 若对于任意正数 ε 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$,

则称序列 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 依概率收敛于 a , 记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a$$



依概率收敛序列的性质:

$$\text{设 } X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b,$$

又设函数 $g(x, y)$ 在点 (a, b) 连续, 则

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b)$$



证明 因为 $g(x, y)$ 在 (a, b) 连续,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

使得当 $|x - a| + |y - b| < \delta$ 时,

$$|g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon,$$



$$\begin{aligned}& \text{于是 } \{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| \geq \varepsilon\} \\& \quad \subset \{|X_n - a| + |Y_n - b| \geq \delta\} \\& \quad \subset \left\{|X_n - a| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|Y_n - b| \geq \frac{\delta}{2}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \text{因此 } P\{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| \geq \varepsilon\} \\& \quad \leq P\left\{|X_n - a| \geq \frac{\delta}{2}\right\} + P\left\{|Y_n - b| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,\end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon\} = 1. \quad [\text{证毕}]$$



2. 伯努利大数定理

伯努利资料

设 f_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{f_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{f_A}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$



证 因为 $f_A \sim b(n, p)$ ，由第四章第二节例6，
有

$$f_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

其中， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从以 p 为参数的 $(0-1)$ 分布，因而 $E(X_k) = p$ ($k = 1, 2, \cdots, n$)，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{f_A}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$



说明

伯努利定理表明事件发生的频率 $\frac{f_A}{n}$ 依概率收敛于事件的概率 p , 它以严格的数学形式表达了频率的稳定性.

因而当 n 很大时, 事件发生的频率与概率有较大偏差的可能性很小. 在实际应用中, 当试验次数很大时, 便可以用事件发生的频率来代替事件的概率.



三、典型例题

例1 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立,

具有如下分布律:

X_n	$-na$	0	na
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

问是否满足切比雪夫定理?

解 独立性依题意可知, 检验是否具有数学期望?

$$E(X_n) = -na^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + na^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = 0,$$

说明每一个随机变量都有数学期望,
检验是否具有有限方差?

因为

X_n^2	$(na)^2$	0	$(na)^2$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$



所以 $E(X_n^2) = 2(na)^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = a^2,$

所以 $D(X_n) = E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 = a^2.$

说明离散型随机变量有有限方差,
故满足切比雪夫定理的条件.

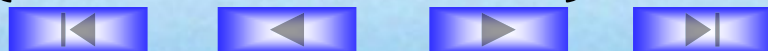


例2 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 且 $E(X_k) = 0, D(X_k) = \sigma^2, k = 1, 2, \dots$, 证明对任意正数 ε 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \sigma^2 \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

解 因为 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是相互独立的, 所以 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, \dots$ 也是相互独立的, 由 $E(X_k) = 0$, 得 $E(X_k^2) = D(X_k) + [E(X_k)]^2 = \sigma^2$, 由辛钦定理知

对于任意正数 ε , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \sigma^2 \right| < \varepsilon \right\} = 1.$



四、小结

三个大数定理 { 切比雪夫定理的特殊情况
伯努利大数定理
辛钦定理

频率的稳定性是概率定义的客观基础，而伯努利大数定理以严密的数学形式论证了频率的稳定性.



第二节 中心极限定理

- 一、问题的引入
- 二、基本定理
- 三、典型例题
- 四、小结

一、问题的引入



实例：考察射击命中点与靶心距离的偏差.

这种偏差是大量微小的偶然因素造成的微小误差的总和, 这些因素包括: 瞄准误差、测量误差、子弹制造过程方面 (如外形、重量等) 的误差以及射击时武器的振动、气象因素(如风速、风向、能见度、温度等) 的作用, 所有这些不同因素所引起的微小误差是相互独立的, 并且它们中每一个对总和产生的影响不大.



问题:

某个随机变量是由大量相互独立且均匀小的随机变量相加而成的, 其概率分布情况如何呢?



二、基本定理

定理一（独立同分布的中心极限定理）

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差: $E(X_k) = \mu$, $D(X_k) = \sigma^2 > 0$ ($k = 1, 2, \dots$), 则随机变量之和的

标准化变量 $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma}$



的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \leq x \right\}$$
$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

定理一表明:

当 $n \rightarrow \infty$, 随机变量序列 Y_n 的分布函数收敛于标准正态分布的分布函数.



定理二(李雅普诺夫定理)

李雅普诺夫

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 它们具有数学期望和方差:

$$E(X_k) = \mu_k, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

记 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$

若存在正数 δ , 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \rightarrow 0,$$

则随机变量之和的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \Phi(x).$$



定理二表明:

无论各个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 服从什么分布, 只要满足定理的条件, 那么它们的和 $\sum_{k=1}^n X_k$ 当 n 很大时, 近似地服从正态分布.

(如实例中射击偏差服从正态分布)

下面介绍的定理三是定理一的特殊情况.

定理三(棣莫弗—拉普拉斯定理)

棣莫弗

拉普拉斯

设随机变量 η_n ($n = 1, 2, \dots$) 服从参数为 n, p ($0 < p < 1$) 的二项分布, 则对于任意 x , 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

证明 $\eta_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 其中 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且

服从同一 $(0-1)$ 分布.

$$P\{X_k = i\} = p^i (1-p)^{1-i}, i = 0, 1.$$



因为 $E(X_k) = p$, $D(X_k) = p(1-p)$ ($k = 1, 2, \dots, n$),

根据定理一得

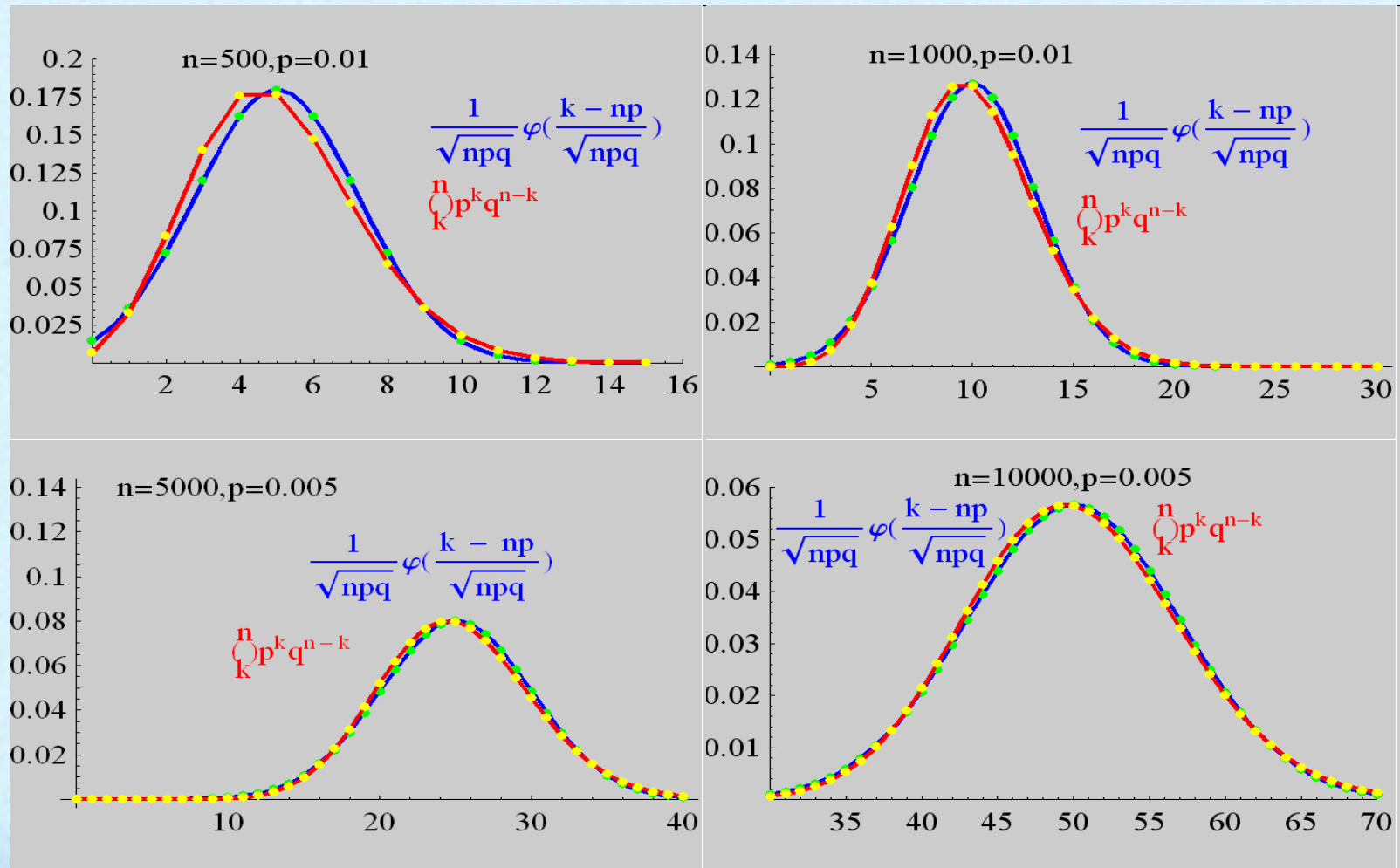
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\}$$
$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

定理三表明:

正态分布是二项分布的极限分布, 当 n 充分大时, 可以利用该定理来计算二项分布的概率.



下面的图形表明:正态分布是二项分布的逼近.



三、典型例题

例1 一加法器同时收到20个噪声电压 V_k ,
($k = 1, 2, \dots, 20$), 设它们是相互独立的随机变量, 且
都在区间 $(0, 10)$ 上服从均匀分布, 记 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$,
求 $P\{V > 105\}$ 的近似值.

解 易知 $E(V_k) = 5$, $D(V_k) = \frac{100}{12}$ ($k = 1, 2, \dots, 20$).

由定理一, 随机变量



$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{20} V_k - 20 \times 5}{\sqrt{100/12} \sqrt{20}} = \frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{100/12} \sqrt{20}}$$

近似服从正态分布 $N(0, 1)$, 于是

$$\begin{aligned} & P\{V > 105\} \\ &= P\left\{\frac{V - 20 \times 5}{(10/\sqrt{12})\sqrt{20}} > \frac{105 - 20 \times 5}{(10/\sqrt{12})\sqrt{20}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{V - 100}{(10/\sqrt{12})\sqrt{20}} > 0.387\right\} \end{aligned}$$



$$= 1 - P\left\{\frac{V - 100}{(10/\sqrt{12})\sqrt{20}} \leq 0.387\right\}$$

$$\approx 1 - \int_{-\infty}^{0.387} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 1 - \Phi(0.387)$$

$$= 0.348.$$

即有

$$P\{V > 105\} \approx 0.348.$$



例2 一船舶在某海区航行, 已知每遭受一次海浪的冲击, 纵摇角大于 3° 的概率为 $1/3$, 若船舶遭受了90 000次波浪冲击, 问其中有29 500 ~ 30 500次纵摇角度大于 3° 的概率是多少?

解 将船舶每遭受一次波浪的冲击看作一次试验, 并假设各次试验是独立的,

在90 000次波浪冲击中纵摇角大于 3° 的次数记为 X , 则 X 是一个随机变量, 且 $X \sim b(90\,000, \frac{1}{3})$.



其分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{90\,000}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90\,000-k},$$

$$k = 0, 1, \dots, 90\,000.$$

所求概率为

$$P\{29\,500 \leq X \leq 30\,500\}$$

$$= \sum_{k=29\,500}^{30\,500} \binom{90\,000}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90\,000-k}.$$

直接计算很麻烦, 利用棣莫弗 - 拉普拉斯定理



$$P\{29\,500 \leq X \leq 30\,500\}$$

$$= P\left\{ \frac{29\,500 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{30\,500 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\}$$

$$\approx \int_{\frac{29\,500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{30\,500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \Phi\left(\frac{30\,500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29\,500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

其中 $n = 90\,000$, $p = \frac{1}{3}$,



即有

$$\begin{aligned} & P\{29\,500 \leq X \leq 30\,500\} \\ & \approx \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \\ & = 0.9995. \end{aligned}$$



例3 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长数相互独立, 且服从同一分布.

- (1) 求参加会议的家长数 X 超过450的概率;
- (2) 求有1名家长来参加会议的学生数不多于340的概率.



解 (1) 以 X_k ($k = 1, 2, \dots, 400$) 记第 k 个学生来参加会议的家长数,

则 X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

易知 $E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19$, ($k = 1, 2, \dots, 400$)

而 $X = \sum_{k=1}^{400} X_k$, 由定理一, 随机变量

$$\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}} = \frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}}$$



近似服从正态分布 $N(0, 1)$, 于是

$$\begin{aligned} & P\{X > 450\} \\ &= P\left\{\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}} > \frac{450 - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}} \leq 1.147\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(1.147) \\ &= 0.1251. \end{aligned}$$



(2) 以 Y 记有一名家长来参加会议的学生数,
则 $Y \sim b(400, 0.8)$, 由定理三得,

$$\begin{aligned} & P\{Y \leq 340\} \\ &= P\left\{ \frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \right\} \\ &= P\left\{ \frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq 2.5 \right\} \\ &\approx \Phi(2.5) \\ &= 0.9938. \end{aligned}$$

补充例题



四、小结

三个中心极限定理 { **独立同分布的中心极限定理**
李雅普诺夫定理
棣莫弗 - 拉普拉斯定理

中心极限定理表明, 在相当一般的条件下, 当独立随机变量的个数增加时, 其和的分布趋于正态分布.

