

概率论的起源——机会性游戏

200234 上海师范大学教育科学学院 王幼军

概率论不仅是当代科学的重要数学基础之一,而且还是当代社会和人类日常生活最必需的知识之一.正如十九世纪法国著名数学家拉普拉斯所说:“对于生活中的大部分,最重要的问题实际上只是概率问题.你可以说几乎我们所掌握的所有知识都是不确定的,只有一小部分我们能确定地了解.甚至数学科学本身,归纳法、类推法和发现真理的首要手段都是建立在概率论的基础之上的.因此,整个的人类知识系统是与这一理论相联系的…….”的确,我们只要浏览一下当今的报纸,看一看电视,就会发现在某种程度上概率统计的语言已经成为人类生活中重要的一部分.然而,饶有趣味的是,这门被拉普拉斯称为“人类知识的最重要的一部分”的数学,却直接地起源于一种相当独特的人类行为的探索:人们对于机会性游戏的研究思考.

1. 机会性游戏

所谓机会性游戏就是靠运气取胜的一些游戏,如赌博等.这种游戏不是哪一个民族的单独发明,它出现在世界各地的许多地方,如埃及、印度、中国等.著名的希腊历史学家希罗多德(Herodotus)在他的巨著《历史》中写道:早在公元前1500年,埃及人为了忘却饥饿的困扰,经常聚集在一起掷骰子和紫云英,这是一种叫做“猎犬与胡狼”的游戏,照一定规则,根据掷出各种不同的紫云英而移动筹码.大约从公元前1200年起,人们把纯天然的骨骼(如脚上的趾骨)改进成了立方体的骰子,方法是摩擦骨骼使其成为一个粗糙的立方体,骰子的六面就形成了,再在骰子面上刻上不同的数字.它是游戏中常用的随机发生器,可能因为当时没有表示数字的符号或简单标记,早期骰子各面

的数字都被刻成浅浅的印迹.现在相对面的数字之和是7的骰子大约产生于公元前1400年的埃及.到了中世纪,基督教堂曾发起多次活动以反对玩骰子和纸牌,对这种游戏的抵制不仅仅因为是赌博活动,更是因为与赌博相伴的酗酒和其它恶行的出现.但是,赌博仍然屡禁不止,甚至在1190年的第三次十字军战争中,不得不做出这样一个规定:任何一个骑士身份以下的人不允许赌钱,而骑士和牧师则可以玩,但在24小时之内输赢不得超过20先令.总之,在自古至今各国文献的记载中,有关赌博等机会性游戏的记载的文献是非常丰富的,赌博手册的存在、各种随机发生器的发明,各个时代和国家经常展开的反对赌博的斗争活动等都是早年机会性游戏流传的明证.

在玩骰子游戏的几千年的时间里,概率理论的某些思想可能早应该出现了.但是一直没有迹象表明人们观察到赌博与数学之间的直接关系,甚至没有发现有人意识到骰子点数下落的频率的计算是可能的、有效的,或每一面会以相同的频率出现等这些最简单的概率思想的萌芽.对于概率思想出现得如此缓慢的现象,人们提出了许多解释.这些解释包括:可能是由于缺少完美平衡和“诚实”的骰子,因而阻碍了人们发现任何可察觉的规律;或者由于缺少适当的数学概念和符号而阻碍了数学的探索;缺乏刺激概率思想研究的经济问题;还有一个更有力的原因可能是“随机”概念本身与时空观念相对:长期以来,人们一直认为一系列的好运和坏运都是神授的.人们相信上帝或众神以某种预先确定的计划指导着世俗的事件,所以随机不但是不可能的,甚至是不可想象的.古希腊人似乎已得到这样的结论:精确和规律只存在

于神的王国,而混沌和无规律则是人类世界的特征。但是他们不愿使理想化的自然规律屈从于一个不完美的物理世界的事实,因而未能发展概率的思想。还有一个解释涉及到道德的规范,赌博长期以来被视为一种不道德的行为,历史上充满了限制、制止赌博的各种尝试。既然赌博被视为不道德的,那么将机会性游戏作为科学研究的对象也就是大逆不道了。然而这些原因没有一个得到广泛的认可,人们对每一个猜测都提出了反驳的理由。

2. 概率的萌芽

直到文艺复兴时期,随着阿拉伯数字和计算技术的广泛传播,简单代数和组合数学的发展,并且哲学的思想开始转变、拓展时,随机事件的试验和计算在本质上才有所进展,概率的思想才开始逐渐浮出水面。现在有史可查的对于赌博问题的研究是从意大利开始的。最初人们研究的重点是赌博输赢的各种可能性或次数。在早期的一些文献中,经常提到对观察的结果如何加以归类计算这类问题,这是一类非常实用的问题,也是赌徒们最迫切关注的问题。比如,1477年意大利但丁的《神曲》的注释本刊印,在该书的“编印缘起”中讲到了投掷三颗骰子可能出现的各种结果,等等。15世纪后期和16世纪早期,当一些意大利数学家开始思考在包括赌博游戏中各种存在结果的数学的比率时,才有了对概率的第一次纯数学的处理。

卡尔达诺(Girolamo Cardano, 1501—1576)是意大利数学和医学教授,他天资聪明,常常不循规蹈矩,有着有趣而丰富的经历。他的最著名的著作是1524年出版的《伟大的艺术》(Ars Magna),其中包括了那时所有发展起来的代数规则,包括求三次和四次方程的解法。在一生中超过40年的时间里,卡尔达诺几乎每天都参与赌博。早年时,他就认定,如果一个人赌博不是为了钱,那么就没有什么能够弥补在赌博中耗去的时间,这些时间本来是可以花在更值得做的事上的,比如学习。作为对在不合适的活动中浪费时间的补偿,他认真地

分析了这种活动中的有价值的方面——智力因素,例如,从一副牌中抽出A的概率是多少?同时掷两个骰子,出现点数的和为7的概率是多少?等等。最终,在一本名叫《机会性游戏手册》(Liber de Ludo Aleae)的书中,他公布了这些调查和思考的结果和关于赌博实践的体会。这本书成书于1526年左右,但一直到一百多年后的1663年才出版。在书中他提醒他的赌徒朋友:在分牌的时候,得到某一张牌的机会是随着前一张牌的选定而增大的。在题为“掷一个骰子”的章节里,他写到:“我能掷出2、4、6,同时也能掷出1、3、5。因此,如果骰子是‘诚实’的,那么下赌注就应依据这种等可能性;如果骰子不是‘诚实’的,那么它就以一定的或大一点或小一点的比例离开这种等可能性。”这里面已包含了等可能性事件的概率的思想萌芽,即一个特殊结果的概率是所有达到这个结果的可能方法的数目被一个事件的所有可能结果的总和所除。这里我们看到了关于骰子的问题由经验向理论概率思想的第一次转变。从这一角度来讲,有人认为卡尔达诺可以被称为是“概率论之父”,概率论这一个数学分支应当以此作为起点。但是这种观点并未得到广泛的认可。

除了卡尔达诺,伟大的天文学家伽利略也早已开始对掷骰子的问题进行数学化的思考。在一篇写于1613和1623年之间、标题为《关于骰子游戏的思想》(Sopra le Scoperte de I Dadi)的短文中,伽利略解释了在抛掷三枚骰子时为什么会有216种同等可能的结果的问题。他在其短文开头就说,有人曾经要求他解释为什么三枚骰子的某些和数的出现看来似乎有同样大小的可能性,而玩骰子的人们却认为它们不是同等可能的,如和数为10比和数为9更占有优势。伽利略所用方法的思路是:所有可能的结果有 $6 \times 6 \times 6 = 216$,三个骰子诸面点数构成和为9的各种组合是:1、2、6; 1、3、5; 1、4、4; 2、2、5; 2、3、4; 3、3、3。而和为10的组合为1、3、6; 1、4、5; 2、2、6; 2、3、5; 2、4、4; 3、3、4。但是各种组合出现的

几率并非相等,例如,3、3、3的组合只有一种途径掷出,而3、3、4则有三种不同的途径掷出.实际上,9可以有25种不同的途径掷出,而10则有27种不同的途径掷出,这就是10比9较常出现的原因.用现在的知识知道,出现和数为9的可能性为 $\frac{25}{216}$,出现和数为10的可能性是 $\frac{27}{216}$.为什么一个赌徒能够区分出这么小的差别?人们认为一个合理的解释是:这种知识来自几百年的积累和代代相传下来的经验.

3. 概率的产生

尽管有卡尔达诺和伽利略等先驱者的一些非常重要的工作,而数学史学家大多赞同这样一个观点:一个非常特别问题的解法的探求成为数学化的概率科学产生的标志之一,这个问题被称作“点数问题”.所谓“点数问题”是指当游戏在完成前被终止时,怎样处理两名技能相当的游戏者的赌金分配问题,其依据是游戏者的得分或是游戏终止时的点数.意大利的帕巧利(Luca Pacioli, 1445—1509)早在1494年出版的《算术概论》(Summa de Arithmetica)一书中,就提到了赌博中常常遇到的“点数问题”,他是最早在数学著作中提到点数问题的作者.紧接着,卡尔达诺和他的对手塔尔塔利亚(Nicola Fontana Tartaglia 1499—1557)都讨论过这个问题.然而,所有这些人,对这一问题得出的结论都不正确.直到一百多年后,在1654年,一个名为德·梅勒(De Mere, 1607—1684)的法国人把这个问题寄给了当时的数学天才帕斯卡,从此概率论历史上一个决定性的阶段才开始了.

帕斯卡(Blaise Pascal, 1623—1662)在早年就表现出了超常的数学能力,在数学史中他被称作“最伟大的天才”(Greatest Might-Have-Been),他曾经对微积分、射影几何、概率论等数学分支做出了巨大的贡献.他拥有如此高的数学天赋和非常敏锐的直觉能力,他理应创造更多的发现.不幸的是,在他生命的大部分时间里,他倍受敏感性神经痛和精神幻觉症的折磨.1662年他去世时年仅39岁.

与帕斯卡共同分享概率论创始人的声誉

的另一位法国数学家费马(Pierre de Fermat, 1601—1665)的一生则充满了喜悦与和平.他的职业是一名律师,他把他大部分的空余时间都献给了数学研究.虽然他没受过什么特别的数学训练,但是在数学这一领域中,却取得了同时代其他数学家不可比拟的重大的发现.他和笛卡尔(Descartes, 1596—1650)各自独立地发明了解析几何学,为微积分奠定了技术基础.在十七世纪的数论领域里他的成果最为丰富,数论成为一个正式的抽象数学领域与他的工作密不可分.作为一个谦逊朴实的人,他很少发表文章,但是他与当时很多一流数学家不断通信,并在他的同时代人中有相当的影响力.费马的众多重要的贡献丰富了数学的很多领域,所以被称为“业余数学家之王”.

德·梅勒是一位军人、语言学家、古典学者,同时也是一个有能力、有经验的赌徒,他经常玩骰子和纸牌.虽然他不是全职的数学家,但他经常从数学的角度提出和思考赌博中出现的一些有深度的问题,“点数问题”就是其中之一.这一次,德·梅勒的问题的形式是:假设两个赌博者(德·梅勒和他的一个朋友)每人出30个金币,两人各自选取一个点数,谁选择的点数首先被掷出3次,谁就赢得全部的赌注.在游戏进行了一会儿后,德·梅勒选择的点数“5”出现了2次,而他的朋友选择的点数“3”只出现了一次.这时候,德·梅勒由于一个紧急事情必须离开,游戏不得不停止.他们该如何分配赌桌上60个金币的赌注呢?德·梅勒的朋友认为,既然掷出他选择的点数的机会是德·梅勒的一半,那么他该拿到德·梅勒所得的一半,即他拿20个金币,德·梅勒拿40个金币.然而德·梅勒争执道:再掷一次骰子,对他来说最糟糕的事是他将失去他的优势,游戏是平局,每人都得到相等的30个金币;但如果掷出的是“5”,他就赢了,并可拿走全部的60个金币.在下次掷骰子之前,他实际上已经拥有了30个金币,他还有50%的机会赢得另外30个金币,所以,他应分得45个金币.

他们对这一问题的看法和计算方法不一

致,为此而争论不休.后来德·梅勒把这个问题告诉了帕斯卡,帕斯卡对此也很感兴趣,又写信告诉了费马.于是在这两位伟大的法国数学家之间开始了具有划时代意义的通信.在通信中,两人用不同的方法正确地解决了这个问题.在1654年7月29日,帕斯卡写给费马的信中,他提到了这个问题和可能的解决方法,“你的解法非常正确,是给我印象最深的一个,但这些组合太过麻烦.我发现了另一种更为简洁的实在可行的解法.”在1654年10月21日他写给费马的信中提到,当他们互不赞同的时候,能这样通信,保持一致是鼓舞人心的.他说:“先生,您的最后一封信让我非常满意,您有关‘点数问题’的解法我很钦佩.更是因为我非常理解它完全是属于你的,它与我的解法完全不同,然而却轻易地得到了同样的结果,现在我们又开始和睦了.”在1654年7月和10月的通信中,他们还联系“点数问题”思考了其他的问题,比如当两人的技艺不等时,或超过2人参加游戏的赌金的分配问题.尤其是帕斯卡的研究更有效地推动了数学概率理论的发展,他的组合方法具有一般性,他的工作中还蕴涵了概率论中另一重要的思想——数学期望的思想.在十七世纪弥漫着浓重的宗教神学气质的精神环境中,身为神学家的帕斯卡也结合了宗教和数学两种思想于概率的思考中.帕斯卡在他的著作《思想录》中曾经提出一个以“帕斯卡赌注”闻名的问题:“我们既不知道上帝的存在,也不知道上帝的本质,然而我们将倾向于哪一边呢?……,这里进行的是一场赌博,……让我们来权衡一下在上帝存在的赌注中的得失.让我们估计这两种可能性,如果你赢了,你赢得所有;如果你输了,你却一无所失.因此,你就不必迟疑去赌上帝的存在吧.”这个论述中已包含了比较明确的数学期望的思想,这种思想成为以后惠更斯(Christian Huggens)和维特(De. Witt)的概率论工作中的一个基本思想,并在以后相当长的时间里在古典概率论的研究中起着重要的作用.

帕斯卡和费马正确解决了“点数问题”的这

一事件被伊夫斯(Howard Eves)称为“数学史上的一个里程碑”.在概率论的历史上,一般的传统观点则把这一事件看作为概率论的起始标志.之所以不把卡尔达诺的著作作为概率论起源的始点,有这样几个原因:在卡尔达诺的著作中只有一小部分内容是处理机会(chance)的计算的.就像卡尔达诺的大多数作品一样,这种处理似乎只是零碎的和模糊的,混杂于卡尔达诺的个人的一些奇闻轶事、哲学思考,大量流行的赌博者常用的欺骗策略和精明的心理应用等建议之中,并且他的这本著作中所阐述的数学思想对数学家和一般的赌徒几乎都没有什么影响.因为对于当时的数学家而言,概率太游戏化了,而对赌徒而言,概率又太数学化.而帕斯卡和费马的通信除了正确解决了一些问题和概念之外,还创造了一种研究的传统——用数学方法(主要是组合数学的方法)研究和思考机会性游戏.这种传统统治这个领域达半个多世纪的时间.所以,综合考虑所有这些因素,这个事件赢得它在概率论历史上标志性的地位是当之无愧的.

参考文献

- [1] Deborah J. Bennett. Randomness. Harvard University Press. 1998.
- [2] Ian. Hacking. The Emergence of Probability. Cambridge: Cambridge University Press. 1975.
- [3] Osytein Ore. “Pascal and the Invention of Probability Theory”. American Mathematical Monthly. vol.47. 409-19.
- [4] L. Daston. Classical Probability in the Enlightenment. Princeton[M]. Princeton University Press. 1988.
- [5] 帕斯卡尔. 思想录(Pensées). 商务印书馆. 1997年.
- [6] Howard Eves 著. 欧阳绛等译. 数学史上的里程碑. 北京科学技术出版社. 1990. P.228-236.
- [7] 汪晓勤. 韩祥临. 中学数学中的数学史. 科学出版社. 2002年.