

《概率论与数理统计》模拟试卷 14 参考答案

一、判断题.

- (√) 1. 若事件 A, B 满足 $A \cap B = \phi$, 则称 A 与 B 是互斥事件.
- (×) 2. 若三个事件 A, B, C 两两独立, 则 A, B, C 相互独立.
- (√) 3. 二项分布的极限分布是正态分布.
- (√) 4. 二维随机变量的联合分布函数可以确定边缘分布函数.
- (×) 5. 对于任意的 X 和 Y , 都有 $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- (×) 6. 若 $X \sim \chi^2_{(n_1)}$, $Y \sim \chi^2_{(n_2)}$, 则 $X + Y \sim \chi^2_{(n_1+n_2)}$
- (√) 7. 估计量是用于估计未知参数的样本的函数.

二、填空题.

1. 设 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3$, 则 $P(A \cup B) = \underline{0.52}$.
2. 设 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的泊松分布, 且 $E[(X-1)(X-2)] = 10$, 则 $\lambda = \underline{4}$.
3. 设随机变量 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $D(X) = \sigma^2$, 根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \underline{1/9}$ 或 (0.111) .
4. 由独立同分布中心极限定理可知, 当 n 充分大时, 则 $\bar{X} \sim \underline{N(\mu, \sigma^2/n)}$.
5. 估计量的优良性包括 无偏性、有效性和相合性 (或一致性).

三、选择题.

1. 设 A 与 B 互斥, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则下列结论正确的是 (B).
- A. $P(A|B) = P(A)$ B. $P(A|B) = 0$ C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P(B|A) > 0$
2. 在第六次全国人口普查中, 调查总体是 (D).
- A. 每一个人 B. 每一户 C. 每个省 D. 全国总人口
3. 二维正态分布的两个边缘分布都是 (A).
- A. 一维正态分布 B. 二项分布 C. 指数分布 D. 泊松分布
4. 若 X 的期望 $E(X) \geq 0$, 且 $E(\frac{1}{2}X^2 - 1) = 2$, $D(\frac{1}{2}X - 1) = \frac{1}{2}$, 则 $E(X) =$ (C).
- A. 0 B. 1 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

5. 若 $X \sim N(1,4)$, $Y \sim N(1,9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $\text{Cov}(X,Y) = (\quad D \quad)$.
 A. 2.4 B. 2.5 C. 2.6 D. 2.7
6. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 若 $1-\alpha$ 减小时, 则 μ 的置信区间长度 $L (\quad A \quad)$.
 A. 变小 B. 增大 C. 不变 D. 不能确定
7. 在假设检验中, 显著性水平 α 是 ($\quad B \quad$).
 A. $P(\text{接受} H_0 | H_0 \text{为真})$ B. $P(\text{拒绝} H_0 | H_0 \text{为真})$
 C. $P(\text{接受} H_0 | H_0 \text{为假})$ D. $P(\text{拒绝} H_0 | H_0 \text{为假})$

四、计算题.

1. 设总体 $X \sim E(\lambda)$, 即: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (x \geq 0,) \\ 0 & x < 0 \end{cases}, (\lambda > 0), (x_1, x_2, \dots, x_n)$

是来自 X 的一个样本观测值, 且 $x_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, 求 λ 的最大似然估计?

解: 似然函数:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i)}$$

似然取对数函数:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda(\sum_{i=1}^n x_i)$$

对数似然函数求导并令导数为零, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n \ln \lambda - \lambda(\sum_{i=1}^n x_i) \right] = \frac{n}{\lambda} - (\sum_{i=1}^n x_i) = 0, \\ \therefore \hat{\lambda} &= \frac{1}{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)} = \frac{1}{\bar{x}} \end{aligned}$$

2. 李教授要外出参加会议, 他乘汽车、火车和飞机的概率分别是0.6、0.3和0.1, 而汽车、火车和飞机正点到达的概率分别是0.7、0.8和0.9, 求(1)他正点到达的概率有多大? (2)若已知晚点到达, 则他是乘飞机的概率为多大?

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示“李教授乘汽车、火车和飞机”，

B 表示“正点到达”， $\bar{B}$ 表示“晚点到达”，

依题意可知： A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组。

$$P(A_1)=0.6 \quad P(A_2)=0.3 \quad P(A_3)=0.1$$

$$P(B|A_1)=0.7 \quad P(B|A_2)=0.8 \quad P(B|A_3)=0.9$$

$$P(\bar{B}|A_1)=0.3 \quad P(\bar{B}|A_2)=0.2 \quad P(\bar{B}|A_3)=0.1$$

(1) 由全概率公式可得，李教授正点到达的概率为：

$$P(B)=\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)=0.6 \times 0.7 + 0.3 \times 0.8 + 0.1 \times 0.9 = 0.75$$

(2) 若已知晚点到达，由贝叶斯公式知，则他是乘飞机的概率为：

$$P(A_3|\bar{B})=\frac{P(A_3)P(\bar{B}|A_3)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(\bar{B}|A_i)}=\frac{0.1 \times 0.1}{0.6 \times 0.3 + 0.3 \times 0.2 + 0.1 \times 0.1}=0.04$$

3. 设随机变量 X 的概率密度为： $f(x)=Ae^{-|x|}$ ， $(-\infty < x < +\infty)$ ，

试求：(1) 系数 A ；(2) $P(0 < X < 1)$ ；(3) X 的分布函数 $F(x)$ 。

$$\text{解：(1) } 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx=2A\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(2) \quad P(0 < X < 1)=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e}) \approx 0.316$$

$$(3) \quad F(x)=\int_{-\infty}^x f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^{-|x|}dx$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^x dx=\frac{1}{2}e^x$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } F(x)=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^x e^{-x} dx)=1-\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\text{因此, 分布函数 } F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & (x < 0) \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

4. 已知服用一定剂量的某种安眠药，平均睡眠时间为 20.8 小时，服用新研制的安眠药，据说能平均增加 3 小时。现测得 9 例服用新药的平均睡眠时间为 $\bar{x} = 24.2$ 小时，方差 $s^2 = (2.296)^2$ ，假定睡眠时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，是否可以认为新安眠药的平均睡眠时间为 23.8 小时？（ $\alpha = 0.01$ ）

$$(t_{0.005}(8) = 3.355, \quad t_{0.025}(8) = 2.306; \quad t_{0.05}(8) = 1.859)$$

解：（1）待检假设为： $H_0: \mu = 23.8 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 23.8$

（2）已知： $n = 9, \quad \bar{x} = 24.2, \quad s = 2.296,$

$$\therefore |T| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| = \left| \frac{24.2 - 23.8}{2.296} \times 3 \right| = 0.523$$

（3） $\alpha = 0.01, \quad t_{\frac{\alpha}{2}}(n - 1) = t_{0.005}(8) = 3.355$

（4）由于 $|T| = 0.523 > t_{\frac{\alpha}{2}}(n - 1) = 3.355$ 不成立，所以，接受 H_0 ，即可以认为新安眠药的平均睡眠时间为 23.8 小时。

5. 某地区 1994—1999 年居民消费支出和收入金额资料如下：

收入 x （亿元）	64	70	77	82	86	92
消费支出 y （亿元）	56	60	66	75	82	88

建立该地区消费支出 y 对收入 x 的直线回归方程？

解：（1）

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	64	56	4096	3136	3584
	70	60	4900	3600	4200
	77	66	5929	4356	5082
	82	75	6724	5625	6150
	86	82	7396	6724	7052
	92	88	8464	7744	8096
Σ	471	427	37509	31185	34164
$\frac{1}{n} \Sigma$	78.5	71.167			

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 471 \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 427 \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 37509 \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 31185 \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 34164$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{6 \times 34164 - 471 \times 427}{6 \times 37509 - (471)^2} \approx 1.204$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 71.167 - 1.204 \times 71.167 \approx -14.518$$

所以，回归方程为 $\hat{y} = -14.518 + 71.167x$