

案例：正弦信号参数的估计（ME）

背景：正弦信号是一种基本信号，十分广泛地应用于工农业生产和日常生活。另外，从信号分析的角度来看，任何变化规律复杂的信号都可以分解为按正弦规律变化的分量。因此，研究一个复杂信号激励下的电路响应，可以利用叠加定理分别研究每一个正弦分量激励下的电路响应，再叠加得到总的响应。故对正弦稳态电路的分析在电路分析中占有非常重要的地位。本质上，具有周期性的经济数据可能很自然地适合这样的模型；而在声纳和雷达中，物理机械所产生的观测信号也是正弦的。

建模：设接收到带有高斯噪声的正弦信号 $X(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \phi) + w(n)$ $n = 0, 1, \dots, N-1$

其中 $w[n]$ 是零均值、方差为 σ^2 的白噪声，频率 f_0 是待估参数。假设相位 ϕ 是与 $w[n]$ 无关的随机变量，且服从 $\phi \sim U[0, 2\pi]$ 分布。

分析求解：利用上面的假设，信号 $s(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \phi)$ 可以看作是 WSS 随机过程的一个现实，这一点通过确定 $s(n)$ 的 ACF 和均值就可以验证。均值为

$$E[s(n)] = E[A\cos(2\pi f_0 n + \phi)] = \int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_0 n + \phi) \frac{1}{2\pi} d\phi = 0$$

ACF 为：

$$r_{ss}[k] = E[s[n]s[n+k]] = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 k$$

观测过程的 ACF 变为

$$r_{xx}[k] = r_{ss}[k] + r_{ww}[k] = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 k + \sigma^2 \delta[k]$$

为了简化讨论，随后的估计量我们假定信号幅度是已知的。令 $A = \sqrt{2}$ ，则 ACF 变成

$$r_{xx}[k] = \cos 2\pi f_0 k + \sigma^2 \delta[k]$$

为使用矩方法估计频率，我们观测到

$$r_{xx}[1] = \cos 2\pi f_0$$

因此，不用假定 σ^2 的知识，可以实现矩方法估计量

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos \hat{r}_{xx}[1]$$

其中 $\hat{r}_{xx}[1]$ 是 $r_{xx}[1]$ 的估计量。对于 $k=1$ ，ACF 的一个合理的估计量是

$$\hat{r}_{xx}[1] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-2} x[n]x[n+1]$$

所以，最终我们得到频率估计为

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos\left[\frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-2} x[n]x[n+1]\right]$$

结论：可以利用矩法引入一种容易确定和实现简单的估计量。尽管这种方法得到的估计量不是最佳的，但是如果数据记录足够长，那么它是很有用的。