

8. 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AP = PB$, 则 $|A^3 + 2A^2 - E| =$ ()

- A. 15 B. -15 C. 30 D. -30

9. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $X =$ ()

- A. $\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$

10. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & x \\ 3 & 10 & y & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件是 ()

- A. $x \neq 1$ 或 $y \neq 2$ B. $x \neq 1$ 且 $y \neq 2$ C. $x = 1$ 或 $y = 2$ D. $x = 1$ 且 $y = 2$

11. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解 ()

- A. $\mu \neq 0$ B. $\lambda \neq 1$ 且 $\mu \neq 0$ C. $\lambda = 1$ 或 $\mu = 0$ D. $\lambda \neq 1$

12. 设矩阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 且 $|A| > 0$, 则 $A =$ ()

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 若 X 满足 $A + X = B$, 求 $X =$ _____

2. 计算 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$ _____

3. 设 A 为三阶矩阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(3A)^{-1} - 2A| =$ _____.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵_____.

5. 设 A, B 是 3 阶方阵, E 是 3 阶单位阵, $|A| = 2$ 且 $A^2 + AB + 2E = 0$, 则 $|A+B| =$ _____.

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, n 是正整数, 则 $A^n =$ _____.

三、简答题 (共 40 分)

1. 计算 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (6 分)

2. 用矩阵乘法求连续实行下列线性变换的结果: (8 分)

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + 3y_2 \\ x_3 = 4y_2 - y_3 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = 2z_2 - 5z_3 \\ y_3 = 3z_1 + 7z_2 \end{cases}$$

3. 解矩阵方程 $AX + B = X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. (9 分)

4. 判断下列矩阵是否可逆，如可逆，求其逆矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (8 分)

5. 设 A, B 均为 n 阶矩阵，且 $A = \frac{1}{2}(B + E)$ ，证明： $A^2 = A$ ，当且仅当 $B^2 = E$.
(9 分)