

《线性代数》模拟试卷（四）答案

一、判断题（下列命题正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

1. 交换行列式的两行，行列式的值不变。 (×)
2. 矩阵的乘法满足交换律。 (×)
3. 齐次线性方程组必有解。 (√)
4. 单独一个非零向量线性无关。 (√)
5. 正交向量组必线性无关。 (√)

二、选择题（从A、B、C、D中选出一个正确答案，每小题4分，共20分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & x \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ 中，元素 x 的代数余子式是 (C)

$$A. \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad B. \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad C. -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad D. -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

2. 设 A 是4阶矩阵， $|A| = -3$ ，则 $\|A\| =$ (D)

A. 9 B. 3^5 C. 27 D. -3^5

3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 必须满足 (A)

A. $k=1$ 或 $k=-1$ B. $k \neq 1$ 且 $k \neq -1$ C. $k=1$ D. $k=-1$

4. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A| = 0$ ，则有 (B)

A. A 的列秩为0 B. A 的列向量线性相关

C. A 的行秩为 0 D. A 的秩为 0

5. 设 A 为 n 阶矩阵, 则有 (D)

A. A 的特征值为 0 B. A 的特征值不为 0

C. A 的特征向量为 0 D. A 的特征向量不为 0

三、填空题 (请用正确答案填空, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ 中, 余子式 $M_{22} = 0$, 则 $x = \underline{3}$ 。

2. 矩阵 $\begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 2 & x-1 \end{pmatrix}$ 可逆, 则 x 必满足 $\underline{x \neq -1}$ 且 $\underline{x \neq 3}$ 。

3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系是 $\underline{(2, 1)}$ 。

4. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$ 的秩为 $\underline{3}$ 。

5. 正交向量组 $\alpha_1 = (2, 0, 0), \alpha_2 = (0, 3, 0)$ 单位化为 $\underline{\beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0)}$ 。

四、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 。

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-2) \times (-2) = -4 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\begin{aligned} \text{解: } (A, I) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分}) \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

3. 求向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 2), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (2, 3, 1), \alpha_4 = (3, 5, 2)$ 的一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解: 对矩阵 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$ 作行初等变换

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分}) \end{aligned}$$

所以 α_1, α_2 为一个极大无关组, 且

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解: A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ \dots\dots\dots (2 分)

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 方程组 $(\lambda_1 I - A)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, 所以 A 对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 为不全为 0 的常数 \dots\dots\dots (6 分)

当 $\lambda_3 = -1$ 时, 方程组 $(\lambda_3 I - A)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$, 所以 A 对应于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量为

$k_3\alpha_3, k_3$ 为不为 0 的常数 \dots\dots\dots (10 分)

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 线性无关。

证明: 设 $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_3(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = 0$

则 $(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (2k_2 + 2k_3)\alpha_2 + 3k_3\alpha_3 = 0$ \dots\dots\dots (3 分)

因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

所以 $k_1 + k_2 + k_3 = 2k_2 + 2k_3 = 3k_3 = 0$

所以只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 线性无关 (5分)

2. 设 λ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 证明 λ^2 是 A^2 的一个特征值。

证明: 因为 λ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值

所以存在一个非零向量 α , 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \text{..... (2分)}$$

在上式两边左乘 A , 得 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$

所以 λ^2 是 A^2 的一个特征值 (5分)