

《线性代数》模拟试卷（十五）答案

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

- (×) 1. 若两个矩阵 $AB = O$ ，则 $A = O$ 或 $B = O$.
- (√) 2. 初等矩阵都是可逆的.
- (√) 3. 若行列式某两列元素对应成比例，则行列式为零.
- (√) 4. 任何一个向量组的秩一定不超过其中向量的维数.
- (×) 5. 任意 n 阶矩阵一定能相似对角化.

二、填空题（每小空3分，共15分）

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB - BA =$ _____.

答案: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. 向量 $\alpha = (2, -1, 1)^T$ 在 $\mathbf{R}^3$ 的一个基 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$ 下的坐标为_____.

答案: $(7, -2, 1)^T$

3. 若 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ _____.

答案: 1

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 秩为_____.

答案: 3

5. 向量 $\alpha = (1, 2, 3)^T$ 的长度为_____.

答案: $\sqrt{14}$

三、单项选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 中代数余子式 $A_{12} = -1$, 则 $A_{23} = ()$.

A. -2 B. 1 C. -1 D. 2

答案: B

2. 设 A 为 n 阶方阵, $B = -A$, 则必有 ().

A. $|B| = -|A|$ B. $|B| = |A|$ C. $|B| = (-1)^{2n}|A|$ D. $|B| = (-1)^n|A|$

答案: D

3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 k 必须满足 ().

A. $k = 1$ 或 $k = -1$ B. $k \neq 1$ 且 $k \neq -1$ C. $k = 1$ D. $k = -1$

答案: B

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ().

A. $P_1 A P_2 = B$ B. $A P_2 P_1 = B$ C. $P_2 P_1 A = B$ D. $P_1 P_2 A = B$

答案: D

5. 四元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系是 ().

A. $(0, 0, 0, 0)^T$ B. $(0, 0, 2, 0)^T$ C. $(1, 0, -1, 0)^T$ D. $(0, 0, 2, 0)^T$ 和 $(0, 0, 0, 1)^T$

答案: B

6. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 6, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a, -2)^T$ 线性相关, 则 a 应满足条件 (). A. $a = 2$ B. $a \neq 2$ C. $a = -2$ D. $a \neq -2$

答案: C

7. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 B 有特征值 1, 2, 3,

则 $x = ()$. A. 4 B. -3 C. -4 D. 3

答案: A

8. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $|A| = 0$ 的充分必要条件为 ().

A. $r(A) = n$

B. A 的列向量组线性无关

C. A 的某两行对应元素成比例

D. A 的某个列向量可由其余列向量线性表示

答案: D

四、计算题 (共 6 小题, 共 51 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -(-18 + 14) = 4 \quad (7 \text{ 分})$$

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, 求 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44}$ 的值. (7 分)

解: $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (3 分)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
 (5 分)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -27 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$
 (6 分)

$$= 63$$
 (7 分)

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7 分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 则 A 可逆. (2 分)

构造矩阵 $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
 (4 分)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

4. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, 已知它的三个解向量为 η_1, η_2, η_3 , 其中 $\eta_1 = (3, -4, 1, 2)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (4, 6, 8, 0)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解. (10 分)

解: 已知方程组是四元, 且 $R(A) = 3$, 则由非齐次线性方程组解的结构知, 导出组的基础解析中含有一个解向量, 设为 ξ (3 分)

$$\xi_1 = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = (6, -8, 2, 4)^T - (4, 6, 8, 0)^T = (2, -14, -6, 4)^T \quad (6 \text{ 分})$$

又因为非齐次线性方程组有特解 $\eta_1 = (3, -4, 1, 2)^T$ (8 分)

则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = \eta_1 + k\xi$, $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ (10 分)

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

$$\text{解: } A \text{ 的特征多项式为 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(2 + \lambda)$$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ (4 分)

当 $\lambda_1 = 4$ 时, 解方程 $(A - 4E)x = O$. 由

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (7 分)

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解方程 $(A + 2E)x = O$. 由

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, -5)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$). (10 分)

6. 已知 R^3 的两个基分别为 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 和

$\beta_1 = (1, 3, 5)^T$, $\beta_2 = (6, 3, 2)^T$, $\beta_3 = (3, 1, 0)^T$, 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵. (10 分)

解: 设从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P . (1 分)

则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$ (2 分)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$