

《线性代数》模拟试卷（十六）

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是().

- A. $k = -2$ B. $k = 3$ C. $k \neq -2$ 且 $k \neq 3$ D. $k = -2$ 或 $k = 3$

2. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, 则 a, b, c 的值分别为().

- A. $a = -10, b = 1, c = 1$ B. $a = -10, b = 1, c = -1$
C. $a = 10, b = -1, c = -1$ D. $a = 10, b = -1, c = 1$

3. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 及矩阵 $B = (A, b)$ 的秩分别为().

- A. $R(A) = 2, R(A, b) = 3$ B. $R(A) = 2, R(A, b) = 4$
C. $R(A) = R(A, b) = 2$ D. $R(A) = R(A, b) = 3$

4. 设方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_2 - x_3 = b \\ x_3 - x_4 = c \\ x_4 - x_5 = d \\ x_5 - x_1 = e \end{cases}$ 有解, 则 a, b, c, d, e 满足().

- A. $a = b = c, d = e$ B. $a = b = c = d = e$ C. $a + b + c + d + e = 0$ D. $abcde \neq 0$

5. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 在下列向量组中也线性无关的向量组是().

A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

B. $3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$

D. $\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

6. 设 $\lambda = 2$ 为可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值为().

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

二、填空题 (每小空 3 分, 共 12 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 A, B 是 3 阶方阵, E 是 3 阶单位阵, $|A|=2$ 且 $A^2 + AB + 2E = 0$, 则 $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & 4 \end{pmatrix}$ 的标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题 (共 8 小题, 共 70 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

2. 设四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} - 2A_{12} + 2A_{13} - A_{14}$ 之值. (8 分)

3. 解矩阵方程 $AX + B = X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. (8 分)

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$, 已知 $R(A) = 2$, 求 λ 与 μ 的值. (6 分)

5. 设线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$, 讨论 λ 取何值时, 此方程组 (1) 无解?

(2) 有唯一解? (3) 有无穷多解? 并在方程组有无穷多解时, 求其通解. (12 分)

6. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解. (8 分)

7. 已知 R^3 的两个基为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 及 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$. 求 (1) 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P ; (2) 求 x 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标. (12 分)

8. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (9 分)