

§ 2 向量组的线性相关性

回顾：向量组的线性组合

定义： 给定向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ ，对于任何一组实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，表达式

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m$$

称为向量组 A 的一个**线性组合**。

$k_1, k_2, \dots, k_m$ 称为这个**线性组合的系数**。

定义： 给定向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 和向量 b ，如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ，使得

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$$

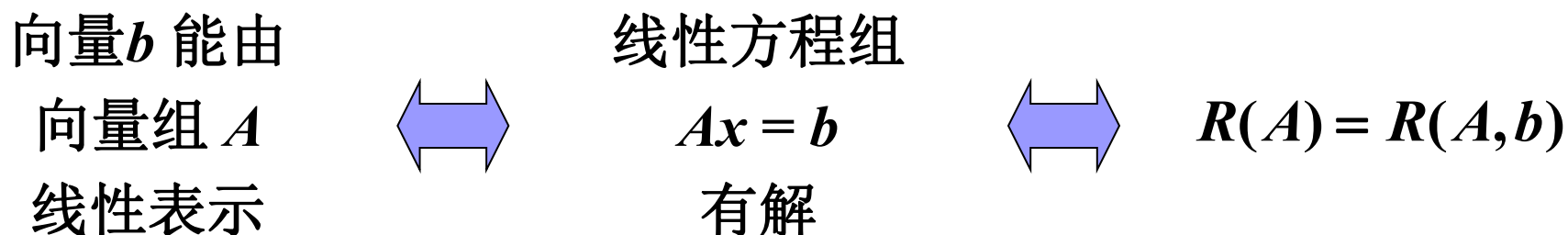
则称**向量 b 能由向量组 A 线性表示**。

引言

问题1: 给定向量组 A , 零向量是否可以由向量组 A 线性表示?

问题2: 如果零向量可以由向量组 A 线性表示, 线性组合的系数是否不全为零?

回忆上节课 定理的结论:



问题1: 给定向量组 A , 零向量是否可以由向量组 A 线性表示?

问题1': 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在解?

回答: 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 一定存在解.

事实上, 可令 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$, 则

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0 \quad (\text{零向量})$$

问题2: 如果零向量可以由向量组 A 线性表示, 线性组合的系数是否不全为零?

问题2': 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在**非零解**?

回答: 齐次线性方程组不一定有非零解, 从而线性组合的系数不一定全等于零.

例: 设 $E = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\text{若 } k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

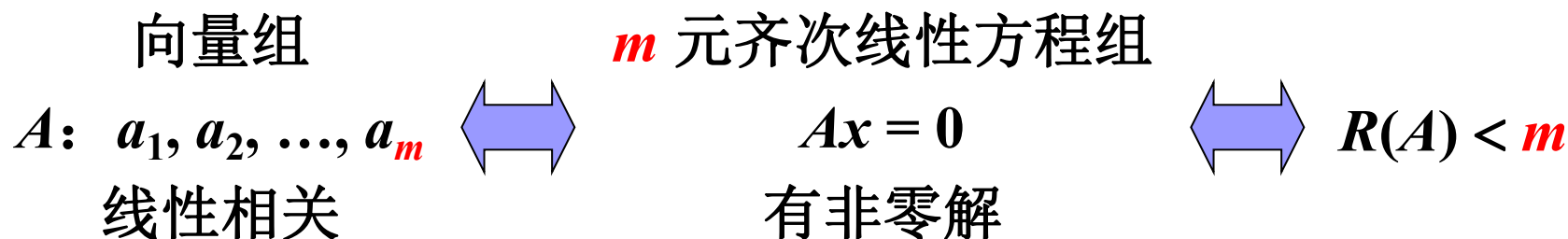
则 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

向量组的线性相关性

定义： 给定向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ ，如果存在**不全为零**的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使得

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = \mathbf{0} \quad (\text{零向量})$$

则称向量组 A 是**线性相关**的，否则称它是**线性无关**的。



备注:

- 给定向量组 A , 不是线性相关, 就是线性无关, 两者必居其一.
- 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 通常是指 $m \geq 2$ 的情形.
- 若向量组只包含一个向量: 当 a 是零向量时, 线性相关; 当 a 不是零向量时, 线性无关.
- 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ ($m \geq 2$) 线性相关, 也就是向量组 A 中, 至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.
特别地,
 - ➡ a_1, a_2 线性相关当且仅当 a_1, a_2 的分量对应成比例, 其几何意义是两向量共线.
 - ➡ a_1, a_2, a_3 线性相关的几何意义是三个向量共面.

向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关

⇔ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使得

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0 \text{ (零向量)} .$$

⇔ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

⇔ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m .

⇔ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关

⇔ 如果 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$ （零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0 .$$

⇔ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

⇔ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

⇔ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关

⇔ 如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$ (零向量), 则必有

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0 \text{ (零向量)} .$$

⇔ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

⇔ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

⇔ 向量组 A 中至少有一个向量都能被其余 $m-1$ 个向量线性表示.

例1: 试讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

线性无关

例2: 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$,

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组 a_1, a_2 的线性相关性.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2, a_3) = 2$, 故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关;

同时, $R(a_1, a_2) = 2$, 故向量组 a_1, a_2 线性无关.

例3: 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 且

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_2 + a_3, \quad b_3 = a_3 + a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解题思路:

- ✓ 转化为齐次线性方程组的问题;
- ✓ 转化为矩阵的秩的问题.

例3: 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 且

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_2 + a_3, \quad b_3 = a_3 + a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法1: 转化为齐次线性方程组的问题.

$$\text{已知 } (b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 记作 } B = AK.$$

设 $Bx = 0$, 则 $(AK)x = A(Kx) = 0$.

因为向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 所以 $Kx = 0$.

又 $|K| = 2$, 那么 $Kx = 0$ 只有零解 $x = 0$,

从而向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

例3: 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 且

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_2 + a_3, \quad b_3 = a_3 + a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法2: 转化为矩阵的秩的问题.

$$\text{已知 } (b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 记作 } B = AK.$$

因为 $|K| = 2 \neq 0$, 所以 K 可逆, $R(A) = R(B)$,

又向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, $R(A) = 3$,

从而 $R(B) = 3$, 向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

定理

- 若向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 则向量组 $B: a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关.

其逆否命题也成立, 即若向量组 B 线性无关, 则向量组 A 也线性无关.

- m 个 n 维向量组成的向量组, 当维数 n 小于向量个数 m 时, 一定线性相关.

特别地, $n + 1$ 个 n 维向量一定线性相关.

- 设向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关, 而向量组 $B: a_1, a_2, \dots, a_m, b$ 线性相关, 则向量 b 必能由向量组 A 线性表示, 且表示式是唯一的.

课堂小结

向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关

⇔ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使得

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0 \text{ (零向量)} .$$

⇔ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

⇔ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m .