



概率的魅力

——从买彩票中大奖说起

(浙江省玉环县沙门中学 317607) 陈米华

引子:前些日子的一个晚上,在超市购物时偶尔听到台州电视台“阿福搭白担”栏目在谈玉环城关某先生买彩票中了500万元大奖的事情,这促使我催生了一个念头,要来谈谈概率与我们生活的问题。

花上几元钱,买一张彩票,然后就中了几百万乃至几千万元的巨额奖金,这大概是很多人梦寐以求的事。可是这样的机会会有多大呢?答案可能会令我们大吃一惊。

1 彩票中奖是个梦

“下一个百万富翁也许就是你!”这句响亮且极具诱惑力的话是彩票广告词。买一注“6④1”中国体育彩票的诱惑有多大呢?只要你花上2元人民币,就有可能获得500万元大奖!一点小小的投资竟然可能得到天文数字般的奖金,这没办法不让人动心。很多人都会想:也许真如广告所说,下一个百万富翁也许就是我呢!因此,自从彩票开始发行到现在,大多数成年人都购买过这种彩票,并且也真的有数以百计的人成为百万富翁。如今在世界各地都流行着类似的游戏,在我国各省各市也都发行了各种福利彩票、体育彩票,各地充满诱惑的广告满天飞,而报纸、电视上关于中大奖的幸运儿的报道也热闹非凡,因此吸引了不计其数的人踊跃购买。

但一注彩票的中奖机会会有多少呢?让我们以前些日子比较流行的“6④1”中国体育彩票为例来计算一下。买一注彩票,你只需在0到9的10个数字中任意选取7个,可以重复(如6666666)。在每一期开奖时,有一个专门的摇奖机按顺序随机摇出7个标有数字的小球(如6656810),如果你买的号码与开奖的号码一致,那你就中了特等奖,其奖金最高是500万元。可是,当我们计算这种摇奖方式能产生出多少种不同的情况时,我们会吓一大跳: $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000000$ 种。这就是说,假如你只买了一注彩票,7个号码按

顺序与开奖号码完全一致的机会是一千万分之一。一千万分之一是一个什么样的概念,也许你不是很清楚——事实上这个数小得已经无法想像,大约相当于整个玉环县每人平均花50元钱购买25注彩票,大概才有一人获大奖的可能。如果每星期你坚持花20元买10注彩票,那你在每19230年中有赢得一次中大奖的机会;即使每星期坚持花2000元买1000注彩票,也大致需要每192年才有一次中大奖的机会。这几乎是单靠人力不可及的,获大奖仅是我们期盼的偶然中的偶然事件。即数学上归为小概率事件之列。(不可能发生的事件)。

举个例子:假如你买1注彩票,号码为0000000,大家也许回笑你是个傻瓜,0000000——中大奖?——这可能吗?不必惊讶,也不必奇怪,其实号码0000000和其他任何一个号码中大奖的概率是一样的,都是一千万分之一。当你意识到买号码0000000不可能中大奖时,其实你也应该明白买其他任何号码中大奖的不可能性。

那么为什么总有人能成为幸运儿呢?这是因为参与的人数是极其巨大的,人们总是抱着撞大运的心理去参加。孰不知,彩民们就在这样的幻想中为彩票公司贡献了巨额的财富。一般情况下,彩票发行者只拿出全部彩金的45%作为奖金返还,这意味着无论奖金的比例如何分配,无论彩票的销售总量是多少,彩民平均付出1元钱只能赢得0.45元的回报。从这个平均值的角度出发,这个游戏是绝对不划算的。

2 直觉想像靠不住

在社会和自然界中,我们可以把事件发生的情况分为三大类:在一定条件下必然发生的事件,叫做必然事件;在一定条件下不可能发生的事件,叫做不可能事件;在一定条件下可能发生也可能不发生的事件,叫做随机事件。在数学上,我们把随机事件产生的可能性称为概率。严格说来,概率就是在同一条件下,发生某种事情可能性的大小。

彩票是否中奖就是个典型的概率事件,但概率不仅仅出现在类似买彩票这样的赌博或游戏中,在日常生活中,我们时时刻刻都要接触概率事件。比如,天气有可能是晴、阴、下雨或刮风,天气预报其实是一种概率大小的预报;又如,今天某条高速公路上有可能发生车祸,也有可能不发生车祸;今天出门坐公交车,车上有可能有小偷,也有可能没有小偷。这些都是无法确定的概率事件。

由于在日常生活中经常碰到概率问题,所以即使人们不懂得如何计算概率,经验和直觉也能帮助他们作出判断。但在某些情况下,如果不利用概率理论经过缜密的分析和精确的计算,人们的结论可能会错得离谱。举一个有趣的小例子:给你一张美女照片,让你猜猜她是模特还是售货员。很多人都会猜前者。实际上,模特的数量比售货员的数量要少得多,所以,从概率上说这种判断是不明智的。其实,上面所说的彩票问题也反映了人们对概率自以为是的直觉是多么靠不住。人们在购买彩票时总是只看到那些中了大奖的故事,而不愿去考虑中大奖其实是个最典型的小概率事件,其概率低到根本不值得去买。有笑话说全世界的数学家都不会去买彩票,因为他们知道,在买彩票的路上被汽车撞死的概率要远远高于中大奖的概率。

人们在直觉上常犯的概率错误还有飞机失事事件。也许出于对在天上飞的飞机本能的恐惧心理,也许是媒体对飞机失事的过多渲染,人们对飞机的安全性总是多一份担心。但是,据统计,飞机旅行是目前世界上最安全的交通工具,它绝少发生重大事故,造成多人伤亡的事故率约为300万分之一。假如你每天坐一次飞机,这样飞上8200年,你才有可能不幸遇到一次飞行事故。300万分之一的事故概率,说明飞机这种交通工具是最安全的,它甚至比走路和骑自行车都要安全得多。事实也证明了在目前的交通工具中飞机失事的概率最低。1998年,全世界的航空公司共飞行1800万次喷气机航班,共运送约13亿人,而失事仅10次。而仅仅美国一个国家,在一年内其公路死亡人数就曾达到21000名,约为自40年前有喷气客机以来全世界所有喷气机事故死亡人数的总和。虽然人们在坐飞机时总有些恐惧感,而坐汽车时却非常安心,但从统计概率的角度来讲,最需要防患

于未然的,却恰恰是我们信赖的汽车。

3 轻易估计最易错

不断地抛一枚硬币,当它落到地上时,出现正、反面次数相同的概率是多少?很多人都会以为随着抛硬币次数的增加,正、反面出现次数相同的概率也在递增,但这个想法错了。恰恰相反,其概率随着抛硬币次数的增加在递减。抛2次时出现正反两面各1次的概率是50%。下面我们来研究抛4次时出现正反两面各2次的概率情况。设抛一次硬币出现正面记为A,出现反面记为B,抛4次所出现的所有结果共有16种:①四次全部都是正面或全部都是反面有2种AAAA,BBBB;②三正一反或三反一正有8种:AAAB, AABA, ABAA, BAAA, BBBA, BBAB, BABB, ABBB;③二正二反有6种:BBAA, BABA, BAAB, AABB, ABAB, ABBA,所以抛4次时出现正反两面各2次的概率是37.5%。而抛6次时出现正反两面各3次的概率是31.25%,抛10次时出现正反两面各5次的概率是24.61%,抛100次时出现正反两面各50次的概率只有大约8%(当然,随着抛的次数增加,正、反面出现的次数非常接近,就是难以做到完全相同)。这说明,面对一个貌似简单的概率问题时,我们如果随意估算,有时可能与实际情况恰好南辕北辙。

我们来看一个经典的生日概率问题。以1年365天计(不考虑闰年因素),在某人群中至少要有两人的生日相同,那么需要多少人?大家不难得到结果:366人。只要人数超过365人,就必然会有人的生日相同。但如果一个班有50个人,他们中间有人生日相同的概率是多少?你可能想,大概20%~30%。错,有97%的可能!——你相信吗?——还是让我们用科学的计算,准确的数据来说话吧!它的计算方式是这样:

- 50个人可能的生日组合是 $365 \times 365 \times 365 \times \cdots \times 365$ (共50个);
- 50个人生日都不重复的组合是 $365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times 316$ (共50个);
- 50个人生日有重复的概率是 $1 - b/a$ 。这里,50个人生日全不相同的概率是 $b/a = 0.03$,因此50个人生日有重复的概率是 $1 - 0.03 = 0.97 = 97\%$ 。没错,就是97%。

再来看一个常见的抓阄抽奖例子。参加抓阄



抽奖,当然人人都想得奖,这时候该先抽奖还是后抽,才能让中奖概率提高呢?恐怕很多人都会在这个问题上犯糊涂,让我们用科学方法解决这个问题吧。假设有三个阄,其中一个标有“奖”,另两个为空白,甲乙丙依次从箱中摸出一个,谁最有机会摸到标有“奖”的阄呢?首先,甲的机会是三摸一,所以甲摸到标有“奖”的阄的概率是 $1/3$ 。乙的机会如何呢?甲没有摸到的概率是 $2/3$,然后在这个概率中计算乙摸到的概率(只剩2个阄让乙摸): $2/3 \times 1/2 = 1/3$,所以乙摸到标有“奖”的阄的概率是 $1/3$ 。丙呢?丙只有在甲、乙都没有摸到的情况下才可能摸到,所以扣掉甲、乙摸中的概率,就是丙的,其概率是 $1 - 1/3 - 1/3 = 1/3$ 。明白了吗?不管先摸也好,后摸也罢,每个人摸到甜苹果的机会其实都是 $1/3$ ——抓阄是公平的。

4 源于博弈成科学

既然一个事件的概率凭感觉随便估计总是容易出错,而概率又与人类生活息息相关,那人们就得严肃对待概率问题了。概率是怎样产生?又是怎样发展的呢?

概率问题的历史可以追溯到遥远的过去,很早以前,人们就用抽签、抓阄的方法解决彼此间的争端,这可能是概率最早的应用。而真正研究随机现象的概率论出现在15世纪之后,当时的保险业已在欧洲蓬勃发展起来,不过,当时的保险业非常不成熟,只是一种完全靠估计形势而出现的赌博性事业,保险公司要承担很大的不确定性风险,保险业的发展渴望能有指导保险的计算工具的出现。这一渴望戏剧性地因15世纪末赌博现象的大量出现而得到解决。

据传,当时有一个法国赌徒梅勒遇到了一个难解的问题:梅勒和他的一个朋友每人出30个金币,两人谁先赢满3局谁就得到全部赌注。在游戏进行了一会儿后,梅勒赢了2局,他的朋友赢了1局。这时候,梅勒由于一个紧急事情必须离开,游戏不得不停止。他们该如何分配赌桌上的60个金币的赌注呢?梅勒的朋友认为,既然他接下来赢的机会是梅勒的一半,那么他该拿到梅勒所得的一半,即他拿20个金币,梅勒拿40个金币。然而梅勒争执道:再掷一次骰子,即使他输了,游戏是平局,他最少也能得到全部赌注的一半——30个金币;

但如果他赢了,就可拿走全部的60个金币。在下次掷骰子之前,他实际上已经拥有了30个金币,他还有50%的机会赢得另外30个金币,所以,他应分得45个金币。

赌本究竟如何分配才合理呢?后来梅勒把这个问题告诉了当时法国著名的数学家帕斯卡,这居然也难住了帕斯卡,因为当时并没有相关知识来解决此类问题,而且两人说的似乎都有道理。帕斯卡又写信告诉了另一个著名的数学家费尔马,于是在这两位伟大的法国数学家之间开始了具有划时代意义的通信,在通信中,他们最终正确地解决了这个问题。他们设想:如果继续赌下去,梅勒(设为甲)和他朋友(设为乙)最终获胜的机会如何呢?他们俩至多再赌2局即可分出胜负,这2局胜的情况有4种可能的结果:甲甲、甲乙、乙甲、乙乙。前3种情况都是甲最后取胜,只有最后一种情况才是乙取胜,所以赌注应按3:1的比例分配,即甲得45个金币,乙得15个金币。虽然梅勒的计算方式不一样,但他的分配方法是对的。

后来,荷兰著名的天文、物理兼数学家惠更斯把这一问题置于更复杂的情形下,试图总结出更一般的规律,于1657年写成了《论赌博中的计算》一文,这就是最早的概率论著作。正是他们把这一类问题提高到了理论的高度,并总结出了其中的一般规律。同时,他们的研究还吸引了许多学者,由此把赌博的数理讨论推向了一个新的台阶,逐渐建立起一些重要概念及运算法则,从而使这类研究从对机会性游戏的分析发展上升为一个新的数学分支。由赌徒的问题引起,概率逐渐演变成一门严谨的科学。

5 拆穿街头大骗局

概率理论从赌博中发展而来,又反过来成为赌场老板赚钱的强大工具。进入赌场的人总是相信自己运气十足,孰不知赌场庄家早已利用概率规律为他们设下了陷阱。例如,很多赌场里的老虎机上都顶着跑车,下面写着告示,告诉赌客已经有多少人玩了游戏,车还没有送出,暗示现在轮到你的机会大增。但这其实是赌场利用概率规律为赌徒设下的一个诱惑陷阱。概率里有一个重要的规律就是随机事件的独立性,在随机事件中下次事件发生与否与上次事件是没关系的。

但人们通常都对这个规律无知无觉,很多情

况下,人们因为前面已经有了大量的未中奖人群而去买彩票或参与到游戏中去.实际上,只要得大奖的规则没有变化,每人是否幸运,和前面的人是否中奖毫无关系,并不会因为前面没有人中奖你就多了中奖的机会.庄家在参与赌博时已经设计好了一个有利于自己的概率,而很多玩家却浑然不知.

以前些年盛行于农村街头的摸球中奖事件为例.每逢集市,在街上总有人在人流密集的地方设摊摸奖,其口号为:“快来摸一摸,全部都白摸,人人都有奖,走过路过千万别错过.”其规则是:在黑布袋中有六个白乒乓球与六个黄乒乓球,玩家随便从黑布袋中摸出6个球,①摸出6黄或6白可得100元钱;②摸出5黄1白或5白1黄,可得10元;③摸出4黄2白或者4白2黄,可得1元钱;④摸出3黄3白则要花20元钱买一瓶洗发水(估计一瓶洗发水的价格8元左右,即庄家可赚12元).表面上看,共有7种情况,竟有6种情况可获奖,而只有1种情况要花钱买东西(欺骗性很强,容易被蒙骗,让人感觉洗发水反正要用,即便摸到3黄3白,就当花钱买洗发水吧),感觉非常合算.

但实际上赢钱的人很少,而如果连摸5次以上,几乎是必赔无疑.这里,庄家使用了什么障眼法呢?其实,根据概率的知识,这个玩法的答案非常简单.从12个球中摸出任意的6个球,共有 $C_{12}^6 = (12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7) \div (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6) = 924$ 种情况,其中出现6黄或6白的情况,都只有1次,共2次,概率约为0.22%;而出现5黄1白或5白1黄的机会相等,分别有 $C_6^1 \times C_6^5 = 6 \times 6 = 36$ 次,共72次,其概率约为7.79%;出现4黄2白或4白2黄的机会相等,分别有 $C_6^2 \times C_6^4 = 15 \times 15 = 225$ 次,共450次,其概率约为48.70%;而摸到3黄3白的次数为 $C_6^3 \times C_6^3 = 20 \times 20 = 400$ 次,概率约为43.29%.按照上述概率,当玩家摸10次球时,最大的可能为4次3黄3白,共赔48元;5次为4黄2白或4白2黄,获得5元;1次为5黄1白或5白1黄,获得10元.这样玩家一般都会损失30元钱左右,平均一次损失3元.当玩的次数不断增加时,玩家平均损失的钱数几乎总保持在此数额.

由于农村的人知识缺乏,头脑简单,贪小心理

较重;再加上游戏方法简单,男女老幼都会玩,所以上当受骗的人还真的不少,尤其是赶集的农村妇女.而庄家由于利用了概率论,经过周密计算,成了不变的赢家.

6 杂而不乱现规律

科学家们所揭示的概率规律在这个世界上处处存在,我们的世界正是一个充满随机事件又遵循着概率规律的世界.如果我们生活在一个完全必然的世界里,每个人什么时候出生、什么时候幸运、什么时候有难、什么时候死亡都早已“命中注定”,每个人的长相、性格、智力都早已被决定,几千年、几万年、几亿年后宇宙会是个什么样子也早已成定论,所有事物从一开始就沿着确定的轨道向前发展,所有的结果都被我们预见到,这样的世界是多么的枯燥乏味啊!而一个完全不能预测的世界却是一个可怕的、令人发疯的世界.椅子从不会安静地待在那儿,一会儿在这儿,一会儿又不知跑到什么地方去;苹果熟了一会儿落到地上、一会儿飞到天上;生命会无缘无故死亡,也许根本不会有生命.任何东西一会儿这样,一会儿那样,完全无章可寻,整个世界就会乱得一团糟.

我们要庆幸不是生活在那样完全必然或完全偶然的世界里,而是生活在这样一个随机而又规律的世界里,这才是一个井然有序而又丰富多彩的世界.扔一枚硬币,这次扔完应该和下一次毫无关系,硬币正面或者反面的分布似乎是一种无规则分布,可是当我们扔的次数足够多时,正面和反面出现的次数竟几乎趋于一致,遵守着明确的统计规律.概率在无规律、随机变化的外表下,却有着内在的秩序和规则.

人类在对机会性游戏的研究思考中创立和发展了概率理论,并使之成为人类的根本知识之一.今天,概率理论已融入人类日常生活.正如法国大数学家拉普拉斯所说:“这门起源于靠运气取胜的游戏的科学,竟然成了人类知识最重要的一部分.”人类爱“赌博”,不仅仅是一种天性,更是在一个充满概率的世界面前的必然选择,每个人在成长的道路上都面临着无数的机遇和风险,这需要理解概率规律,并适时挑战概率规律,才能做生活的强者.