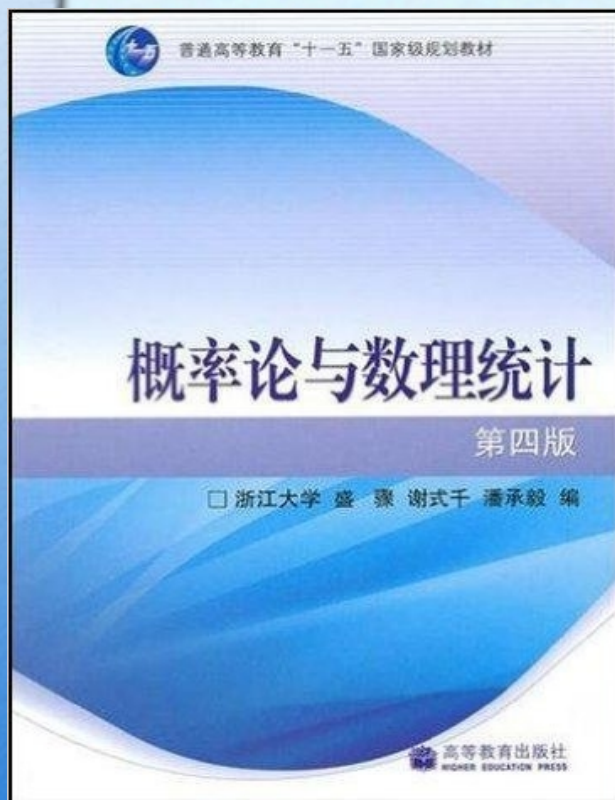


目 录



- 第一章 概率论的基本概念
- 第二章 随机变量及其分布
- 第三章 多维随机变量及其分布
- 第四章 随机变量的数字特征
- 第五章 大数定律及中心极限定理
- 第六章 样本及抽样分布
- 第七章 参数估计
- 第八章 假设检验
- 第九章 方差分析及回归分析

第七章 参数估计

第一节 点估计

第二节 基于截尾样本的最大似然估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

第六节 $(0-1)$ 分布参数的区间估计

第七节 单侧置信区间

第四节 区间估计

- 一、区间估计的基本概念
- 二、典型例题
- 三、小结

为了估计总体 X 的未知参数 θ ，前面已经介绍了矩估计法和极大似然估计法。由于总体 X 的未知参数 θ 的估计量是随机变量，无论这个估计量的性质多么好，它只能是未知参数的近似值，但近似程度如何？误差范围多大？可信程度又如何？这些问题是点估计无法回答的。

那么 θ 的真值在什么范围内呢？是否能够通过样本寻求一个区间，并且给出此区间包含参数 θ 真值的可信程度。这就是总体未知参数的区间估计问题。

在区间估计理论中，被广泛接受的一种观点是置信区间，它是由艾曼 (Neymann)于1934年提出的。

一、区间估计的基本概念

1. 置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$ 含有一个未知参数 θ , $\theta \in \Theta$, 对于给定值 α ($0 < \alpha < 1$), 若由样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ($\underline{\theta} < \bar{\theta}$), 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区

$\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信水平.

2. 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 和 θ 的函数

$$W = W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta),$$

使 W 的分布不依赖于 θ 以及其他未知参数,

称具这种性质的函数 W 为枢轴量.

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b 使得 $P\{a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$,

(3) 从 $a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$,

$\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 就是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

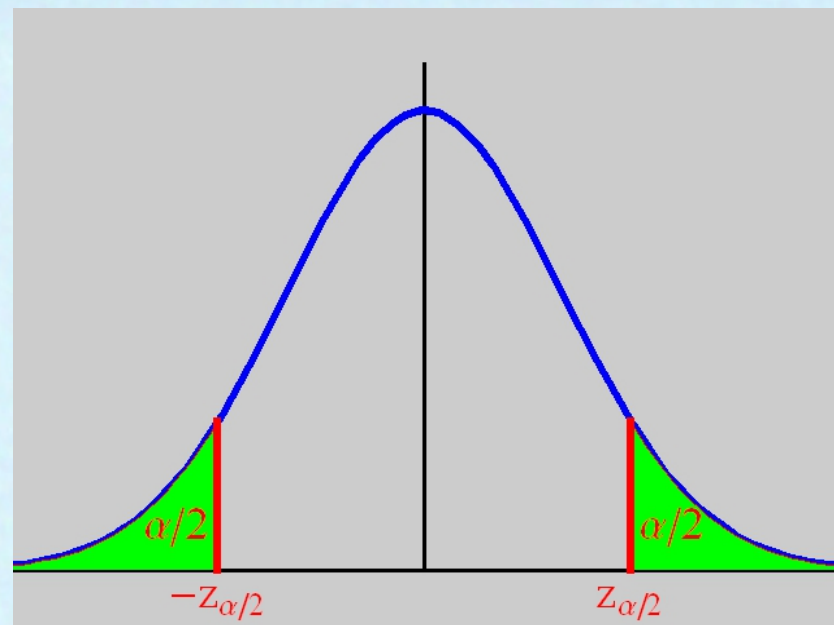
例1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 为已知, μ 为未知, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本, 求 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

解 因为 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计, 且 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$,

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 所服从的分布 $N(0, 1)$ 是不依赖于任何未知

参数的, 按标准正态分布的上 α 分位点的定义, 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$



即
$$P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right).$$

这样的置信区间常写成

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right).$$

其置信区间的长度为 $2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$.



注意：置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是不唯一的。

如果在例 1 中取 $n = 16, \sigma = 1, \alpha = 0.05$,

查表可得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$,

得一个置信水平为 0.95 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96 \right)$.

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\bar{x} = 5.20$,

则置信区间为 (5.20 ± 0.49) , 即 $(4.71, 5.69)$.

在例1中如果给定 $\alpha = 0.05$,

$$\text{则又有 } P\left\{-z_{0.04} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95,$$

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right\} = 0.95,$$

故 $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$ 也是 μ 的置信水平为0.95的置信区间.

其置信区间的长度为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$.

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取 a 和 b 关于原点对称时, 能使置信区间长度最小.



三、小结与思考

1.求置信区间的一般步骤

(1)找枢轴量 Z .

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b 使得 $P\{a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$,

(3) 从 $a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$, 那么 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 就

是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 .

2.思考:

1.置信区间是否唯一?

2. 置信区间的精度和置信度的关系?

谢 谢！