

《线性代数》模拟试卷（十七）

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是().

- A. $a = 1$ B. $a \geq 1$ C. $|a| < 1$ D. $|a| > 1$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 可交换的充分必要条件是().

- A. $x - y = 1$ B. $x = y$ C. $x - y = -1$ D. $x = 2y$

3. 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, O 为 n 阶零矩阵, 则 $\begin{vmatrix} A^T & O \\ O & B^{-1} \end{vmatrix} =$ ().

- A. $\frac{4^n |A|}{|B|}$ B. $\frac{(-2)^n |A|}{|B|}$ C. $4^n |A||B|$ D. $(-2)^n |A||B|$

4. 设齐次线性方程组 $Ax = 0$, 其中 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = n - 3$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 是方程组的三个线性无关的解向量, 则 $Ax = 0$ 的基础解系为().

- A. $\xi_1, \xi_1 + \xi_2$ B. $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
C. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$ D. $-\xi_3 - \xi_2 + \xi_1, \xi_3 + \xi_2 - \xi_1, -2\xi_3$

5. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 0, t, 0)^T, \alpha_3 = (0, -4, 5, -2)^T$ 的秩为 2, 则 $t =$ ().

- A. 2 B. 3 C. -3 D. -2

6. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 已知矩阵 B 有特征值 1, 2, 3,

则 $x =$ ().

A. -3

B. -4

C. 4

D. -2

二、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 当 $k = \underline{\hspace{1cm}}$, $l = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}| (i, j = 1, 2, \dots, 5)$ 中前面冠以负号的项.

2. 已知 3 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 15$, $B = \frac{1}{3}A$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 $r(AB) = 2$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ a+1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 a 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题（共 8 小题，共 70 分）

1. 解矩阵方程 $A + 2X = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. (6 分)

2. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

3. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$, 求 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$ 的值. (8 分)

4. 当 a 为何值时, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 可逆, 并在可逆时, 求 A^{-1} . (8 分)

5. 设四元非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的三个解向量, 且 $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, 3, 4, 5)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 + 2\boldsymbol{\eta}_3 = (3, 4, 5, 6)^T$, 求 $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解. (8 分)

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (9 分)

7. 当 a, b 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
, (1) 有唯一解; (2)

无解; (3) 有无穷多解; 当方程有无穷多解时, 求出它的解. (12 分)

8. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 的秩和一个最大无关组,

并将其余向量用此最大无关组线性表示. (12 分)