

《概率论与数理统计》模拟试卷 1 参考答案

一、选择题.

1. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $A \subset B$, 则下列等式不一定正确的是 (B).
A. $P(B-A) = P(B) - P(A)$; B. $P(AB) = P(A)P(B)$;
C. $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$; D. $P(A \cup B) = P(B)$
2. 设连续型随机变量 X 的分布函数和密度函数分别为 $F(x)$, $f(x)$, 则下列选项中正确的是 (C).
A. $P\{X = x\} = F(x)$; B. $0 \leq f(x) \leq 1$;
C. $0 \leq F(x) \leq 1$; D. $P\{X = x\} = f(x)$
3. 设 X 在 $[2, 4]$ 上服从均匀分布, 则 $E(2X + 1) =$ (D)
A. 1 B. 3 C. 5 D. 7
4. 设 $X \sim N(50, 10^2)$, 则随机变量 (B) $\sim N(0, 1)$.
A. $\frac{X-50}{100}$; B. $\frac{X-50}{10}$; C. $\frac{X-100}{50}$; D. $\frac{X-10}{50}$
5. 设子样 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 X , $\bar{X}$ 为子样均值, 则不是总体期望 μ 的无偏估计量的是 (B).
A. $\bar{X}$; B. $\sum_{i=1}^n X_i$;
C. $0.2X_1 + 0.3X_2 + 0.5X_3$; D. $X_1 + X_2 - X_3$.

二、填空题.

1. 有一批产品共 40 件, 其中有 3 件为次品, 现从中任取两件, 则事件
 $A =$ “至少有一件次品” 的概率 $P(A) = \frac{19}{130}$ 或 0.146.
2. 设 $X \sim N(3, 4)$, 则 $P(-2 < X \leq 8) = 0.9876$.
($\Phi(1.5) = 0.9332$; $\Phi(2.5) = 0.9938$; $\Phi(3.5) = 0.9998$)
3. 设 $X \sim N(0, 1)$, 则其密度函数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-\infty < x < +\infty)$.

4. 设 X 服从均匀分布, 其密度函数是 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, (θ 为未知正数), 子

样 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自 X , 则 θ 的矩估计 $\hat{\theta} = \underline{2\bar{x}}$.

5. 估计量的优良性包括无偏性、有效性和相合性 (一致性).

三、证明题.

1. 设 X 的 $D(X) < \infty$, C 为常数, 证明: $D(X) \leq E[(X - C)^2]$.

证: 因为: $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E[(X - C)^2] = E[X^2 - 2XC + C^2] = E(X^2) - 2E(X)C + C^2$$

$$\text{所以, } E[(X - C)^2] - \text{Var}(X) = [E(X)]^2 - 2E(X)C + C^2 = [E(X) - C]^2 \geq 0$$

即 $E[(X - C)^2] \geq \text{Var}(X)$, (当且仅当 $E(X) = C$ 时取等号)

2. 设总体 X 的分布密度为: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$, ($\lambda > 0$), ($x_1, x_2,$

$\dots, x_n$) 是来自总体 X 的一个样本观测值, 且 $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: λ 的最

大似然估计值 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

证: 似然函数:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i)}$$

$$\text{似然函数取对数, } \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda(\sum_{i=1}^n x_i)$$

对数似然函数求导并令导数为零, 可得:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n \ln \lambda - \lambda(\sum_{i=1}^n x_i) \right] = \frac{n}{\lambda} - (\sum_{i=1}^n x_i) = 0,$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)} = \frac{1}{\bar{x}}$$

四、计算题.

1. 设工厂 A, B 和 C 三个厂生产同样产品, 它们的产品的次品率分别为 1%、2% 和 3%, 现从 A, B 和 C 厂的产品分别占 45%、35% 和 20% 的一批产品中随机抽取一件, 是次品的概率是多大? 若取到的是正品, 它是由 A 厂生产的概率为多大?

解 设 A_1, A_2, A_3 分别表示 “A, B 和 C 三个厂生产的产品”,

B 表示 “取到合格品”, $\bar{B}$ 表示 “取到次品”

依题意可知: 那么 A_1, A_2 构成一个完备事件组。

$$\begin{aligned}P(A_1) &= 0.45 & P(A_2) &= 0.35 & P(A_3) &= 0.2 \\P(B | A_1) &= 0.99 & P(B | A_2) &= 0.98 & P(B | A_3) &= 0.97 \\P(\bar{B} | A_1) &= 0.01 & P(\bar{B} | A_2) &= 0.02 & P(\bar{B} | A_3) &= 0.03\end{aligned}$$

由全概率公式可得:

$$\begin{aligned}P(\bar{B}) &= P(A_1)P(\bar{B} | A_1) + P(A_2)P(\bar{B} | A_2) + P(A_3)P(\bar{B} | A_3) \\&= 0.45 \times 0.01 + 0.35 \times 0.02 + 0.2 \times 0.03 \\&= 0.0175\end{aligned}$$

由贝叶斯公式知, 取到的是正品, 它是由 A 厂生产的概率为:

$$\begin{aligned}P(A_1 | B) &= \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B | A_i)} \\&= \frac{0.45 \times 0.99}{0.45 \times 0.99 + 0.35 \times 0.98 + 0.2 \times 0.97} = 0.453\end{aligned}$$

2. 食品厂用自动装罐机装罐头食品, 每罐的标准重量为 500g。每隔一定的时间, 需要检验机器的工作情况。现抽得 10 罐, 测得其重量 (单位: g) 的平均值为 $\bar{x} = 498$, 样本方差 $s^2 = 6.5^2$ 。假定罐头的重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试问机器的工作是否正常 ($\alpha = 0.02$)? ($t_{0.005}(9) = 3.2498$; $t_{0.01}(9) = 2.8214$; $t_{0.025}(9) = 2.2622$)

解: (1) 待检假设为: $H_0: \mu = \mu_0 (\mu_0 = 500) \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 (\mu_0 = 500)$

(2) 已知: $n = 10$, $\bar{x} = 498$, $s = 6.5$,

$$\therefore |T| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| = \left| \frac{498 - 500}{6.5} \times \sqrt{10} \right| = 0.97$$

$$(3) \alpha = 0.02, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.01}(9) = 2.82$$

(4) 由于 $|T| = 0.97 > t_{0.01}(9) = 2.82$ 不成立, 所以, 接受 H_0 , 即可以机器的工作是正常的。

3. 若熔化时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从一批同类保险丝中随机抽取 9 根, 测其熔化时间的样本均值为 $\bar{x} = 56.32$, 样本方差 $s^2 = (0.22)^2$, 求 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间。

$$(\chi^2_{0.005}(8) = 21.954; \chi^2_{0.975}(8) = 2.1797;$$

$$\chi^2_{0.025}(8) = 17.534; \chi^2_{0.995}(8) = 1.344)$$

解: $\bar{x} = 56.32, s = 0.22, n = 9,$

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05,$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(8) = 2.1797; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(8) = 17.534;$$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\frac{8 \times (0.22)^2}{17.534}, \frac{8 \times (0.22)^2}{2.1797} \right] = (0.0221, 0.1776)$$

4. 设 (X, Y) 有联合分布密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(4x+3y)}, & (x > 0, y > 0) \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

求 (1) 常数 A ; (2) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(3) X 与 Y 是否相互独立.

$$\text{解: (1) } 1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} Ae^{-(4x+3y)} dx dy = \frac{A}{12}, \therefore A = 12$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 3e^{-3x}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 所以 X, Y 相互独立。

5. 某房地产投资公司出售五个楼盘面积与售价资料如下：

楼盘面积 X (百平方米)	9	15	10	11	10
售价 y (千元)	36	80	44	55	35

试建立售价 Y 对楼盘面积 X 的直线回归方程？

解：(1)

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	9	36	81	1296	324
	15	80	225	6400	1200
	10	44	100	1936	440
	11	55	121	3025	605
	10	35	100	1225	350
Σ	55	250	627	13882	2919
$\frac{1}{n}\Sigma$	11	50			

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 55 \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 250 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 627 \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 13882 \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 2919$$

回归方程：

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{5 \times 2919 - 55 \times 250}{5 \times 627 - (55)^2} = 7.68$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 50 - 7.68 \times 11 = -34.48$$

所以，回归方程为 $\hat{y} = -34.48 + 7.68x$