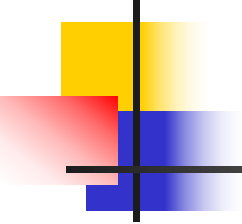


§ 5 向量空间



主要内容

- 1.向量空间的定义(会判断)
- 2.基变换(过渡矩阵) (理解并会计算)
- 3.坐标变换(向量在基下的坐标) (理解并会计算)

封闭的概念

定义： 所谓**封闭**，是指集合中任意两个元素作某一运算得到的结果仍属于该集合。

例： 试讨论下列数集对四则运算是否封闭？

- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$

向量空间的概念

定义： 设 V 是 n 维向量的集合，如果

① 集合 V 非空，

② 集合 V 对于向量的**加法**和**乘数**两种运算封闭，

具体地说，就是：

✓ 若 $a \in V$, $b \in V$, 则 $a + b \in V$. （对加法封闭）

✓ 若 $a \in V$, $\lambda \in R$, 则 $\lambda a \in V$. （对乘数封闭）

那么就称集合 V 为**向量空间**.

例：下列哪些向量组构成向量空间？

1. n 维向量的全体 R^n
2. 集合 $V_1 = \{ (\mathbf{0}, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$
3. 集合 $V_2 = \{ (\mathbf{1}, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$
4. 齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = \mathbf{0} \}$
5. 非齐次线性方程组的解集 $S_2 = \{ x \mid Ax = b \}$

解：集合 R^n , V_1 , S_1 是向量空间，

集合 V_2 , S_2 不是向量空间。

定义：齐次线性方程组的解集称为齐次线性方程组的解空间。

例：设 a, b 为两个已知的 n 维向量，集合

$$L = \{ \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in R \}$$

是一个向量空间吗？

解：设 $x_1, x_2 \in L$, $k \in R$, 因为

- $x_1 + x_2 = (\lambda_1 a + \mu_1 b) + (\lambda_2 a + \mu_2 b)$
 $= (\lambda_1 + \lambda_2) a + (\mu_1 + \mu_2) b \in L$
- $k x_1 = k (\lambda_1 a + \mu_1 b) = (k \lambda_1) a + (k \mu_1) b \in L$

所以， L 是一个向量空间。

定义：把集合

$$L = \{ \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in R \}$$

称为由向量 a, b 所生成的向量空间.

一般地，把集合

$$L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R \}$$

称为由向量 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 所生成的向量空间.

例：设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 和 $b_1, b_2, \dots, b_s$ 等价，记

$$L_1 = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R \},$$

$$L_2 = \{ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_s b_s \mid \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \in R \},$$

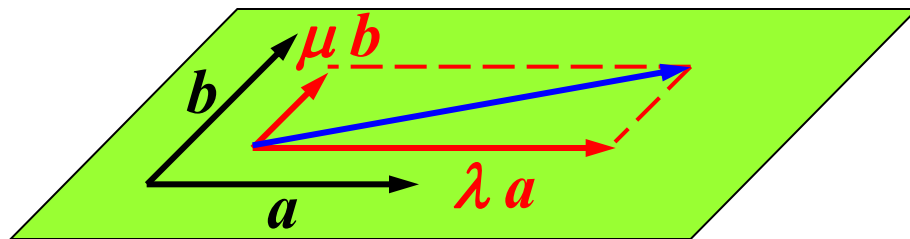
试证 $L_1 = L_2$.

结论：等价的向量组所生成的空间相等.

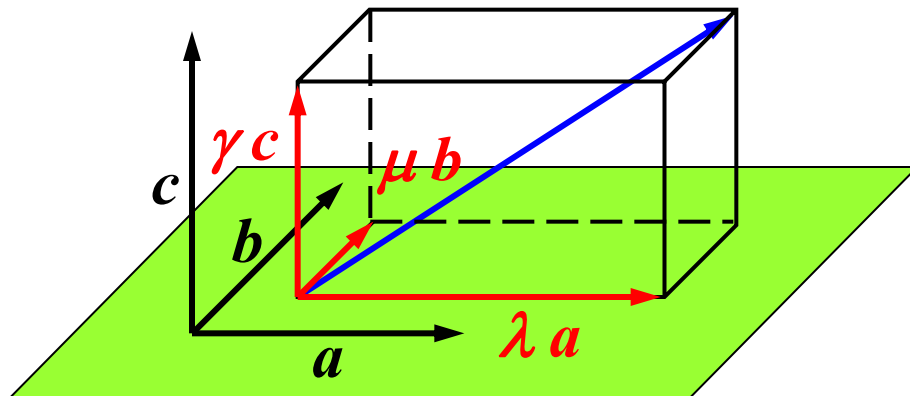




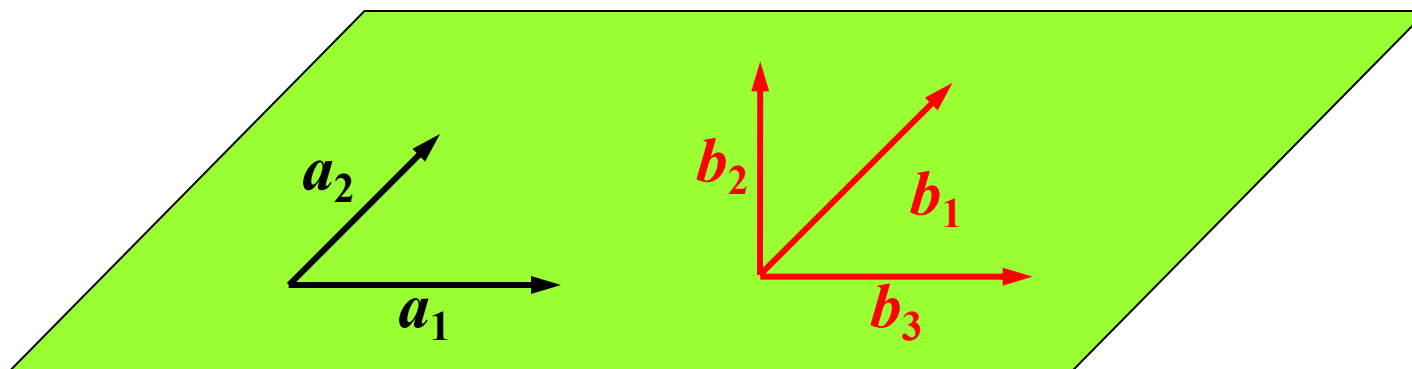
$$L = \{ \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$



$$L = \{ \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$



$$L = \{ \lambda a + \mu b + \gamma c \mid \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \}$$



$$L_1 = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$$

$$L_2 = \{ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in R \}$$

则 $L_1 = L_2$

$$L_3 = \{ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R \}$$

问题: $L_1 = L_2 = L_3$?

子空间的概念

定义： 如果向量空间 V 的非空子集合 V_1 对于 V 中所定义的对加法及数乘两种运算是封闭的，则称 V_1 是 V 的**子空间**。

例：

1. n 维向量的全体 R^n
2. 集合 $V_1 = \{ (\mathbf{0}, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$
3. 集合 $V_2 = \{ (\mathbf{1}, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$

解： V_1 是 R^n 的子空间， V_2 不是 R^n 的子空间。

向量空间的基的概念

定义：设有向量空间 V ，如果在 V 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_r$ ，满足

① $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关；

② V 中任意一个向量都能由 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性表示；

那么称向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 是向量空间 V 的一个基。

r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间。

向量空间	→	向量组
向量空间的基	→	向量组的最大无关组
向量空间的维数	→	向量组的秩

1. n 维向量的全体 R^n

解: E_n 的列向量组是 R^n 的一个基, 故 R^n 的维数等于 n .

2. 集合 $V_1 = \{ (\mathbf{0}, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$

解: E_n 的后 $n-1$ 个列向量是 V_1 的一个基, 故 V_1 的维数等于 $n-1$.

3. n 元齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = \mathbf{0} \}$

解: 齐次线性方程组的基础解系是 S_1 的一个基, 故 S_1 的维数等于 $n-R(A)$.

1. n 维向量的全体 R^n

解: E_n 的列向量组是 R^n 的一个基, 故 R^n 的维数等于 n .

2. 集合 $V_1 = \{ (\mathbf{0}, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$

解: E_n 的后 $n-1$ 个列向量是 V_1 的一个基, 故 V_1 的维数等于 $n-1$.

结论: 若 V_1 是 V 的子空间, 则 V_1 的维数不超过 V 的维数.

3. n 元齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = \mathbf{0} \}$

解: 齐次线性方程组的基础解系是 S_1 的一个基, 故 S_1 的维数等于 $n - R(A)$.

4. 由 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 所生成的向量空间

$$L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R \}$$

- 若 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关, 则

$a_1, a_2, \dots, a_m$ 是向量空间 L 的一个基.

- 若 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 则

向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$

等价于 向量组 A 的最大无关组 $A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$

从而 $L = L_1 = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in R \}$

故向量组 A_0 就是 L 的一个基, A_0 中向量的个数就是 L 的维数.



4. 由 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 所生成的向量空间

$$L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R \}$$

解: $L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R \}$

向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$

等价于 向量组 A 的最大无关组 $A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$

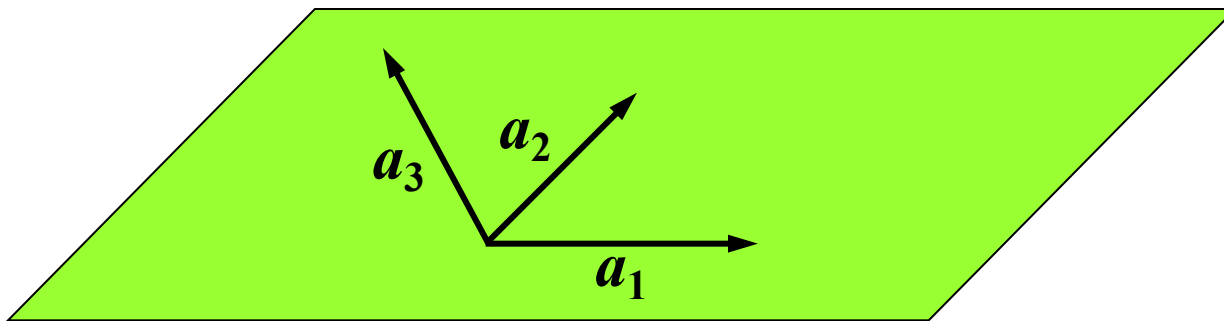
故向量组 A_0 就是 L 的一个基, A_0 中向量的个数就是 L 的维数.

一般来说, 若 $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$, 则 L 是 V 的子空间.

若向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 是向量空间 V 的一个基, 那么

$$V = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R \}$$

结论：等价的向量组所生成的空间相等.



$$L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R \}$$

向量组 a_1, a_2, a_3

等价于 相应的最大无关组 a_1, a_2

$$\text{所以 } L = \{ \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in R \}$$

从而 a_1, a_2 就是 L 的一个基, L 的维数等于2.

定义：如果在向量空间 V 中取定一个基 $a_1, a_2, \dots, a_r$ ，那么 V 中任意一个向量可唯一表示为

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r$$

数组 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 称为向量 x 在基 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 中的**坐标**.

例： $E = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^3 的一个基，

$$\text{那么 } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2e_1 + 3e_2 + 7e_3}}$$

b 在基 e_1, e_2, e_3 中的坐标

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量组称为 R^n 的自然基.

上三角形矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组也是 R^3

的一个基, 那么

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3a_1 - 2a_2 + 7a_3$$

结论: 同一个向量在不同基中的坐标是不同的.

例：设 $A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

验证 a_1, a_2, a_3 是 R^3 的一个基，并求 b_1, b_2 在这个基中的坐标。

分析：

- a_1, a_2, a_3 是 R^3 的一个基 $\iff R(a_1, a_2, a_3) = 3$
- b_1, b_2 在这个基中的坐标 $\iff$ 用 a_1, a_2, a_3 表示 b_1, b_2
- 当 $A \sim^r B$ 时， A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性关系。（P. 93 例11）

为此，考虑把 $(A, B) = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ 化为行最简形矩阵。

例：设 $A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

验证 a_1, a_2, a_3 是 R^3 的一个基，并求 b_1, b_2 在这个基中的坐标。

解：

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

于是 $b_1 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 - a_3$, $b_2 = \frac{4}{3}a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3$

例：在 R^3 中取定一个基 a_1, a_2, a_3 ，再取一个新基 b_1, b_2, b_3 ，
设 $A = (a_1, a_2, a_3)$ ， $B = (b_1, b_2, b_3)$ 。

- ① 求用 a_1, a_2, a_3 表示 b_1, b_2, b_3 的表示式（基变换公式）；
- ② 求向量在两个基中的坐标之间的关系式（坐标变换公式）。

分析：

- 求解矩阵方程 $AX = B$ 。

- 设 $x \in R^3$ ，且 $x = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ ，求解

矩阵方程 $X^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ 。

课堂小结

- 1.会判断向量空间
- 2.会熟练的求过渡矩阵
- 3.会熟练的求向量在基下的坐标