

《线性代数》模拟试卷（二）答案

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

- (×) 1. 交换行列式的两行, 行列式的值不变.
- (×) 2. 对于任意的两个矩阵 A, B , $AB = BA$.
- (√) 3. 当向量组中所含向量的个数大于向量的维数时, 此向量组线性相关.
- (×) 4. 线性方程组一定有解.
- (√) 5. 若 A, B 为同阶矩阵, 且 A 可逆, 若有 $AB = 0$, 则 $B = 0$.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 A 为三阶矩阵, 若已知 $|A| = 2$, 求 $|-2A^T| = \underline{\quad -16 \quad}$.

3. $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} 14 \hspace{1cm}.$

4. 向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 2), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (2, 3, 1), \alpha_4 = (3, 5, 2)$ 的秩为 2.

三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分条件是 (C)

- A. $k \neq -1$
B. $k \neq 3$
C. $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$
D. $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

2. 下列选项中是五阶行列式 $|a_{ij}|$ ($i, j=1, 2, \dots, 5$) 中的一项是 (D)

- A. $a_{12}a_{31}a_{23}a_{45}a_{34}$ B. $-a_{31}a_{22}a_{43}a_{14}a_{55}$ C. $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{51}$ D. $a_{12}a_{21}a_{55}a_{43}a_{34}$

3. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 则行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11}-2a_{12} & 4a_{13}-a_{11} \\ -3a_{21} & -9a_{21}+6a_{22} & -12a_{23}+3a_{21} \\ a_{31} & 3a_{31}-2a_{32} & 4a_{33}-a_{31} \end{vmatrix} = (\quad B \quad)$$

- A. $12D$ B. $24D$ C. $-24D$ D. $-36D$

4. 有矩阵 $A_{3 \times 2}, B_{2 \times 3}, C_{3 \times 3}$, 下列矩阵运算可行的是 (B)

- A. AC B. ABC C. BAC D. $AB-BC$

5. 已知 $A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 则 $A = (\quad B \quad)$

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. 向量组 $\alpha_1 = (3, 1, a)^T, \alpha_2 = (4, a, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, a)^T$ 线性无关, 则 (D)

- A. $a = 0$ 或 2 B. $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ C. $a = 1$ 或 $a = -2$ D. $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$

7. A, B, X 为同阶矩阵, 且 A, B 可逆, 则下列结论错误的是 (D)

- A. 若 $AX = B$, 则 $X = A^{-1}B$ B. 若 $XA = B$, 则 $X = BA^{-1}$
C. 若 $AXB = C$, 则 $X = A^{-1}CB^{-1}$ D. 若 $ABX = C$, 则 $X = A^{-1}B^{-1}C$

8. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件是 (A)

- A. A 的列向量组线性无关 B. A 的列向量组线性相关
C. A 的行向量组线性无关 D. A 的行向量组线性相关

四、计算题 (共 50 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 的值. (6 分)

解: 原式 = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \\ -1 & 15 & 16 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ (按第四列展开) (3 分)

= $(-1)^{2+4}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 15 & 16 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ (5 分)

= -92 (6 分)

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ 3 & 1 & b & -1 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$, 求 a, b 的值. (6 分)

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ 3 & 1 & b & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & b-6 & -4 \end{pmatrix}$ (2 分)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 2 \\ 0 & 2a+2 & b+2 & 0 \end{pmatrix}$ (3 分)

第一、二行已不可能全为 0, 若 $r(A) = 2$, 则第三行必须全为 0, 即必有

$2a+2=0$, $b+2=0$, 即 $a=-1$, $b=-2$ (6 分)

3. 解下列矩阵方程, 求出未知矩阵 X , $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. (8 分)

解: $(A|I) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$ (1 分) $\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$ (2 分)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \end{array} \right) \quad (3 \text{ 分}) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分}), \text{ 所以 } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad (8 \text{ 分})$$

4. 用基础解系表示如下线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 3 \\ \quad \quad \quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases} \quad (15 \text{ 分})$$

解：对方程组的增广矩阵施以初等行变换，化为简化的阶梯形矩阵：

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & -3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -8 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

由此得 $r(A) = r(A|b) = 3$ ，(7 分) 且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 23 - 2x_4 - 6x_5 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

令自由未知量 $x_4 = x_5 = 0$ ，得原方程组的一个特解

$$\eta = (-16, 23, 0, 0, 0)^T \quad (10 \text{ 分})$$

原方程组的导出组同解于齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_4 - 6x_5 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (11 \text{ 分})$$

令自由未知量 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，得导出组的一个基础解系

$$\xi_1 = (1, -2, 0, 1, 0)^T, \xi_2 = (5, -6, 0, 0, 1)^T \quad (13 \text{ 分})$$

于是，原方程组的同解（全部解）为

$$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = (-16, 23, 0, 0, 0)^T + c_1(1, -2, 0, 1, 0)^T + c_2(5, -6, 0, 0, 1)^T$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。 (15 分)

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (15 分)

解：矩阵 A 的特征方程

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad (4 \text{ 分})$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ 。 (5 分)

当 $\lambda_1 = 1$ 时，解齐次线性方程组 $(I - A)x = 0$ (6 分)

$$I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

得同解方程组 $x_1 = -x_2$ (8 分)

令自由未知量 $x_2 = 1$ ，得此方程组的一个基础解系 $\alpha_1 = (-1, 1)^T$ ，(9 分) 所以对应

于 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量为 $c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1 为任意非零常数) (10 分)

当 $\lambda_2 = 3$ 时，解齐次线性方程组 $(3I - A)x = 0$ ；(11 分)

$$3I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12 \text{ 分})$$

得同解方程组 $x_1 = x_2$ (13 分)

令自由未知量 $x_2 = 1$ ，得此方程组的一个基础解系 $\alpha_1 = (1, 1)^T$ ，(14 分) 所以对应

于 $\lambda_2 = 3$ 的全部特征向量为 $c_2 \alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_2 为任意非零常数) (15 分)