

一、报童卖报问题

报童每天清晨从邮局购进报纸零售，晚上卖不出去的退回，设报纸每份的购进价为 b ，零售价为 a ，退回价为 c ，当然应有 $a > b > c$ 。请你给报童筹划一下，他应如何确定每天购进报纸的数量，以获得最大的收入。

解 报童购进数量应根据需求量确定，但需求量是随机的，所以报童每天如果购进的报纸太少，不够卖的，会少赚钱；如果购进太多，卖不完就要赔钱，这样由于每天报纸的需求量是随机的，致使报童每天的收入也是随机的，因此衡量报童的收入，不能是报童每天的收入，而应该是他长期（几个月、一年）卖报的日平均收入。从概率论大数定律的观点看，这相当于报童每天收入的期望值，以下简称平均收入。

假设报童已经通过自己的经验或其它渠道掌握了需求量的随机规律，即在他的销售范围内每天报纸的需求量为 r 份的概率是 $f(r)$ ，（ $r = 0, 1, 2, \dots$ ）。

设报童每天购进 n 份报纸，因为需求量 r 是随机的， r 可以小于 n 、等于 n 或大于 n ；由于报童每卖出一份报纸赚 $a - b$ ，退回一份报纸赔 $b - c$ ，所以当这天的需求量 $r \leq n$ ，则他售出 r 份，退回 $n - r$ 份，即赚了 $(a - b)r$ ，赔了 $(b - c)(n - r)$ ；而当 $r > n$ 时，则 n 份全部售出，即赚了 $(b - c)n$ 。

记报童每天购进 n 份报纸时平均收入为 $G(n)$ ，考虑到需求量为 r 的概率是 $f(r)$ ，所以

$$G(n) = \sum_{r=0}^n [(a-b)r - (b-c)(n-r)] f(r) + \sum_{r=n+1}^{\infty} (a-b)n f(r), \quad (4.2-1)$$

问题归结为在 $f(r)$ 、 a 、 b 、 c 已知时，求 n 使 $G(n)$ 最大。

通常需求量 r 的取值和购进量 n 都相当大，将 r 视为连续变量，这时 $f(r)$ 转化为概率密度函数 $P(r)$ ，这样(4.2-1)式变为：

$$G(n) = \int_0^n [(a-b)r - (b-c)(n-r)] P(r) dr + \int_n^{+\infty} (a-b)n P(r) dr, \quad (4.2-2)$$

计算

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dn} &= (a-b)nP(n) - \int_0^n (b-c)P(r)dr - (a-b)nP(n) \\ &\quad + \int_n^{+\infty} (a-b)P(r)dr \\ &= -(b-c) \int_0^n P(r)dr + (a-b) \int_n^{+\infty} P(r)dr, \end{aligned}$$

令 $\frac{dG}{dn} = 0$ 得

$$\frac{\int_0^n P(r)dr}{\int_n^{+\infty} P(r)dr} = \frac{a-b}{b-c}, \quad (4.2-3)$$

使报童日平均收入达到最大的购进量 n 应满足 (4.2-3)

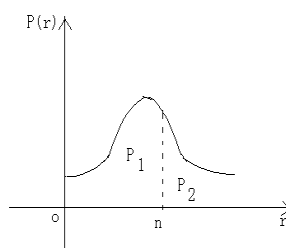
因为 $\int_0^{+\infty} P(r)dr = 1$ 所以 (4.2-3) 式可变为

$$\frac{\int_0^n P(r)dr}{1 - \int_0^n P(r)dr} = \frac{a-b}{b-c}$$

即有
$$\int_0^n P(r)dr = \frac{a-b}{a-c} \quad (4.2-4)$$

根据需求量的概率密度 $P(r)$ 的图形 (如图 4.3) 很容易从 (4.2-4) 式确定购进量 n 。

在图中, 用 P_1, P_2 分别表示曲线 $P(r)$ 下的两块面积, 则 (4.2-3) 式又可记作:



$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a-b}{b-c} \quad (4.2-5)$$

图 4.3

因为当购进 n 份报纸时:

$P_1 = \int_0^n P(r)dr$ 是需求量 r 不超过 n 的概率, 即卖不完的概率;

$P_2 = \int_n^{+\infty} P(r)dr$ 是需求量 r 超过 n 的概率, 即卖完的概率;

所以 (4.2-3) 式表明: 购进的份数 n 应该使卖不完与卖完的概率之比, 恰好等于卖出一份赚的钱 $a-b$ 与退回一份赔的钱 $b-c$ 之比。显然, 当报童与邮局签订的合同使报童每份赚钱与赔钱之比越大时, 报童购进的份数就应该越多。

例如 若每份报纸的购进价为 0.15 元, 售价为 0.2 元, 退回价为 0.12 元, 需求量服从均值 500 份均方差 50 份的正态分布, 报童每天应购进多少份报纸才能平均收入最高, 这个最

高收入是多少？

解 按(4.2-4)式, 因为 $a - b = 0.05$, $b - c = 0.03$, $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{3}$, $r \sim N(\mu, \sigma^2)$,
其中 $\mu = 500$, $\sigma = 50$

查表可得

$$n = \mu + 0.32 \sigma = 516$$

即每天购进516份报纸。

按照(4.2-2)式, 可得最高收入 $G \approx 23.484$ 元

二、博弈问题

设有两人对垒, 每人手中各有三种硬币, 其分值分别为5分、10分、25分; 每次两人各自同时出示一枚硬币, 如属同一分值, 则该币归第一位局中人所有, 否则就属于第二位局中人, 最后以得分值多者为胜。

问: (1)该游戏对双方是否公平?

(2)如不公平, 则受益方采取何种策略可稳操胜券, 而另一方则如何尽可能输得少些?

问题分析

如果只进行一次或很少几次游戏, 则双方都不具有保证稳操胜券的策略。如果运气不佳, 双方均有可能每次都输。所有, 这里公平性或获胜策略只有在统计意义下讨论才有意义, 即需在长期进行游戏或进行较多次游戏的情况下, 才有意义讨论该问题。

显然, 任何一方采取一种有规律的策略, 一旦被对方知晓, 则必输无疑。所以, 双方的策略应是以某种随机的方式选择出示的硬币, 而各类硬币的出现概率予以固定。

直观地看, 该游戏对第一位局中人显然是不公平的。

事实上, 设 A_i 表示甲取出第 i 个硬币,

B_i 表示乙取出第 i 个硬币,

W 表示甲取胜这一事件

则 $P(A_i) = \frac{1}{3}, P(B_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$

$$P(A_i B_i) = P(A_i)P(B_i) = \frac{1}{9},$$

所以甲赢的概率

$$P(W) = P(A_1B_1 \cup A_2B_2 \cup A_3B_3) = \frac{1}{3}.$$

下面我们试图解决问题(1)和(2)，为双方找到各自的最佳策略。

问题的解决

首先，必须用数学语言清晰地把问题表示出来，这在数学模型的建立过程中是较难也是较关键的一步。

如果用A、B、C分别表示分值为5分、10分和25分的硬币，而以(X, Y)表示每次游戏的结果，其中

$$X, Y \in \{A, B, C\},$$

且X表示第一位局中人（以后简称 P_1 ）显示的硬币，Y表示第二位局中人（以后简称 P_2 ）显示的硬币。显然，所有可能出现的结果为：

$$\begin{array}{lll} (A, A), & (A, B), & (A, C), \\ (B, A), & (B, B), & (B, C), \\ (C, A), & (C, B), & (C, C). \end{array}$$

对第一位局中人有利的结果只有

$$(A, A), \quad (B, B), \quad (C, C).$$

假设 P_1 分别以 x_1, x_2, x_3 的概率出示A、B、C硬币，而 P_2 则分别以 y_1, y_2, y_3 的概率出示A、B、C，当然有

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1.$$

假设 P_1, P_2 出示硬币都是相互独立的，那么对第一位局中人而言，分值支付矩阵如下：

		乙		
		A	B	C
甲				

$$A \quad 5 \quad -5 \quad -5$$

$$B \quad -10 \quad 10 \quad -10$$

$$C \quad -25 \quad -25 \quad 25$$

他每次游戏的期望值为

$$E(x, y) = 5x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_1y_3 - 10x_2y_1 + 10x_2y_2 - 10x_2y_3 \\ - 25x_3y_1 - 25x_3y_2 + 25x_3y_3,$$

矩阵表示为:

$$E(x, y) = x \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ -25 & -25 & 25 \end{pmatrix} y^T,$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y^T = (y_1, y_2, y_3)^T$.

显然, 作为游戏者, P_1 希望无论 P_2 采取何种策略, 他的期望值 $E(x, y)$ 尽可能大, 而 P_2 则希望 $E(x, y)$ 尽可能小。

因此, 对 P_1 希望找到

$$\max_x \min_y E(x, y) \quad (4.3-1)$$

的解。而对 P_2 , 希望找到

$$\min_y \max_x E(x, y) \quad (4.3-2)$$

的解。

式(4.3-1)表示在 P_2 采用最佳策略时, P_1 的最大收益; 而式(4.3-2)表示在 P_1 采用最佳策略时, P_2 的最小损失。

本世纪20年代后期, John Von Neumann 在其论文《公司博弈理论》(1928年载于《数学年刊》第100卷P194. 4—320) 中证明了以下的结论:

$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$$

或者，用另一种方式表示：存在 x^*, y^* 使对任意 x, y 有

$$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*, y)$$

显然， x^*, y^* 就是两位局中人的最佳策略，（读者思考其中的原因）。

因此，现在的问题就是：求 x^*, y^* 使

$$E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$$

称 $E(x^*, y^*)$ 为博弈的值。

利用Lagrange乘数法不难求出 x^*, y^* 。令

$$f(x, y) = E(x, y) + \lambda_1 [x(1,1,1)^T - 1] + \lambda_2 [y(1,1,1)^T - 1],$$

由
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

得方程

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ -25 & -25 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$[x_1^*, x_2^*, x_3^*] \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ -25 & -25 & 25 \end{pmatrix} + (1,1,1)\lambda_2 = 0,$$

再由 $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1$ 与 $y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1$ 得:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{10}{17} \\ x_2^* = \frac{5}{17} \\ x_3^* = \frac{2}{17} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1^* = \frac{7}{34} \\ y_2^* = \frac{12}{34} \\ y_3^* = \frac{15}{34} \end{cases},$$

即有
$$E(x^*, y^*) = -\frac{50}{17}.$$

这说明每局游戏 P_1 损失 $\frac{50}{17}$ 。当然这并不是说每局 P_2 一定能得到 $\frac{50}{17}$ ，这只是期望值。正如抛掷一枚无偏差的钱币，出现正面的机会是百分之五十只是一种期望而不是保证一样。

所以，在长期赌赛时， P_2 须用全部时间的 $\frac{7}{34}$ 出5分币， $\frac{12}{34}$ 的时间出10分币，而余下的 $\frac{15}{34}$ 时间出示25分币，但每次出示何种硬币则需随机选择，那么平均每局 P_2 可得 $\frac{50}{17}$ 。

三、航空公司超订机票问题

我们有时会在一些刊物上看到旅客们抱怨，他们本已订上了某天某次班机的机票，但当到达机场而在接待室接受检查时，却听到可怕消息：“对不起先生，你的航班已满员，我们将不得不让您乘坐下次班机了”。这种事情常会引起旅客诸多不便甚至怨愤，在计算机辅助订票的当今时代，应可能设计一个系统以降低这种错误率。

本文目的在于介绍并让大家理解为什么为了盈利，航空公司订给旅客某次航班的票数要多于那次航班所能容纳的乘客数。进一步的模型将为我们揭示航空公司这种做法的强制效果。在任何强制服务及航班数据均缺乏的情况下，我们不可能对某次飞机飞行给出定论，但模型中各个参数变化的结果将会定性的给出航空公司的决策的道理。

2. 记号

虽然，在建立数学模型前，有必要先定义变量，并解释所用记号。一个人在开始建立适当复杂的模型时，不可能在他一开始就用到所有变量。到一页结束时，我总是将所用符号记在另一页上，建议鼓励学生养成这种习惯。而你，作为指导教师将会发现对于理解他们做的工作很有益处。

f ——某次班机的飞行费用，

n ——飞行中飞机所载旅客数，

g ——每一旅客所偿付旅行费，

N ——飞行飞机的容量，

k ——对于一次飞行来说“未到”旅客的人数，

p_k —— k 人未到的概率，

m ——某次班机订票的人数，

S ——飞行所产生的结余（利润），

b ——留下（例如挤掉）一名已订票旅客的耗费，

p ——一个订票旅客到达的概率，

j ——一次班机售出的低费票数，

t ——低费票相对于全费票的低费率。

3. 模型建立

建模时，我发现通过阶段性建模与查证理解问题很自然，也很有益。而在每一阶段，模型特性均是与我对所构模真实系统的直觉相一致，以这种直觉，我们下面开始着手建立一个航空公司希望来源于不足订票的效益模型。

1) 首次尝试

与某次飞行有关的费用不依赖于飞行所带乘客人数。不管飞机是否满员，航空公司都必须付钱给飞行员、导航员、工程师及客舱工作人员。一架满员的飞机相对一架半满的飞机所耗掉的燃料差作为总载油量的百分比是非常小的。飞机起飞时，须带有足以供它到达目的地的燃料，这部分燃料占起飞重量的百分比是很大的，而这一般只要求能使飞机到达终点时所剩油量恰如其分为好。起飞、降落或由机场索要的管理费也不与飞机所载乘客数有关。因此，一定精度下，我们可以忽略飞行的各种费用差别，而假定进行一次飞行的费用为定数 f ，各个乘客付费的总额与飞行耗费之差为结余，或从某种意义上讲，就是利润。当然，包括其它费用（例如：飞机保养）。

另外，要先尽量地努力使模型简单些，而反过来又要包括已有基本公式化模型的更多特征，以此训练学生较好，当然，还应常提醒他们不要受细节渗杂的干扰而去完善那基本模型，一旦他们对模型有了根本的理解，他们就会回过头来去包括更多的影响因素。我发现，决定了他们的策略后，学生建模时最常见的困难就是决定应包括的因素，大的与小的，怎样正好？

若一次飞行载有 n 个旅客，则产生的结余应为 $\pounds ng - f$ ，这里 $\pounds g$ 是每一个旅客所付的费用，十分明显，这个简单的模型有我们所期望它的那种特性，当所载旅客数增加时，利润相应增加，能够取得的最大利润是 $\pounds (Ng - f)$ ，这里 N 是飞机的旅客容量。这里有一个奇点，在奇点处，正好由所载旅客所支付抵消了飞行费用，此时，比此更少的载客飞机将赔钱。所有这些 $\frac{f}{g}$ 都是所期望的。

观察这个简单模型有： $\frac{f}{g}$ 为了取得尽量多的利润，航空公司把目光盯在填满每次飞行上。一旦接受订票为 N ，飞机视为满载，不能再接受更多的订票。但问题又出来了；某些旅客也许会在飞机起飞时未到达现场，对于客机来讲，标准条件下，对于全费旅客的这种行为可以不受惩罚，他们可以迟到，并且其机票对另一次飞行来说仍有效，而对于某些其它客舱的旅客来讲，却没有这种优惠，下面我们将这点考虑在内。不能到达的每一个旅客在某种程度上都有潜在的经济损失。这种旅客在生意上被称为“未到”。

2) 一个较好模型

让我们以下列方式来改进上述提出的简单模型，假定 k 人“未到”的概率为 P_k ，而 m 表示某次航班订票的旅客数，且允许 m 超过 N ，当有 k 人有未到时，航空公司将从飞行中得到的利润为：

$$S = \begin{cases} (m-k)g - f & \text{若 } m-k \leq N \\ Ng - f & \text{若 } m-k \geq N \end{cases} \quad (4.4-1)$$

对于此次飞机来讲，未到的旅客人数为一种偶然事件，因此，所获得利润的适当表达方式
为概率期望利润，我们用 $\bar{S}$ 表示之，则有：

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sum_{k=0}^m P_k x \quad [\text{载有 } m-k \text{ 个旅客时的结余}] \\ &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (Ng - f) + \sum_{k=m-N}^m P_k [(m-k)g - f] \end{aligned} \quad (4.4-2)$$

若 $m \leq N$ ，则第一个和式不出现，而由下降为零的第二个和式给定，显然，订票上机的旅客数也许由于需求缺乏而很小。在这种情况下，航空公司不需要确定多少旅客订票或超订多少，而我们所要考虑的问题是超过供应情况下航空公司的表现行为。现假定为这种情况，且无论航空公司设置多高的订票水平 m ，都可以完成预订。这相当于白天航线的情形。

现在我们能将(4.4-2)改写为：

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sum_{k=0}^m P_k (Ng - f) + \sum_{k=m-N}^m P_k [(m-k)g - f - (Ng - f)] \\ &= (Ng - f) \sum_{k=0}^m P_k + \sum_{k=m-N}^m P_k (m - N - k)g \end{aligned}$$

由 P_k 的定义， $\sum_{k=0}^m P_k = 1$ ，可得：

$$\bar{S} = Ng - f + g \sum_{k=m-N}^m P_k [(m - N - k)] = Ng - f - g \sum_{j=0}^N j P_{m-N+j}$$

因此，我们可以看到 $\bar{S} \leq Ng - f$ 因为带有和式的那部分全为正，要取得接近于期望利润的最大值，唯一方法是减少一切 $0 < j \leq N$ 时的 P_{m-N+j} 而使之尽可能接近于零。如果订票水平 m 超过 N ，将可实现这一情况，实际上，当订票旅客数增加时，“未到”任何大数的概率减小。

这个模型告诉我们，要订票旅客数不超定出现而事实上出现的情况下，航空公司实际上将会超订，以便取得接近于满载飞机时的理论极大期望利润值。在这个模型中未考虑因飞机客容量而多次超订带来的后果，实际上，这种策略会导致大量的旅客被所有的飞机抛下，且随着订票水平的增加而加剧。因此，我们得到，为什么航空公司为尽可能多获得利润，而故意超订，但超定并不现实，模型需要进一步的提炼。

3) 一个更进一步的提炼

在航空公司超定飞行的情况下，会在机场有越来越多的旅客因飞机容量而不能飞走，这些超员则须移往别处，或者在后续飞机上提供座位，此时，航空公司也许会靠付某种费用给旅客以消民愤；或者，旅客决定坐另一家航空公司的飞机，此时需退票，航空公司要付管理费而造成经济损失，还有，随着名声的败坏使航空公司的公开形象遭受损失。我们假定，对于订票到达而不能上机的旅客（在商业上称之为“被挤掉者”），不管是以什么形式，航空公司要支付赔偿费 $\pounds b$ 。这样就需要建立对于超订带有一定惩罚性的更复杂模型，以便取得较高平均收入总额。

若到达机场要检票上机的旅客数为 $m-k$ ，由这次飞机获取利润为：

$$S = \begin{cases} (m-k)g - f, & \text{若 } m-k \leq N \\ Ng - f - (m-k-N)b, & \text{若 } m-k > N \end{cases} \quad (4.4-3)$$

那么，航空公司由一次飞行获取的平均或期望利润为一个和式，它是所有可能未到人数对应情况下的利润乘以相应概率的和。因此，我们有：

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sum_{k=0}^m P_k \cdot [\text{由}(m-k)\text{个旅客带来的利润}] \\ &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k [(Ng - f) - (m-k-N)b] + \sum_{k=m-N}^m P_k [(m-k)g - f] \\ &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k [(N-m+k)g - (m-k-N)b] + (mg - f) \sum_{k=0}^m P_k - g \sum_{k=0}^m k P_k, \quad (4.4-3 \text{ a}) \end{aligned}$$

而 $\sum_{k=0}^m P_k = 1$ 且 $\sum_{k=0}^m k P_k$ 是“未到”的数学期望值，用 $\bar{k}$ 来表示这，则

$$\bar{S} = mg - f - \bar{k}g - (b+g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k)$$

$$= (m - \bar{k})g - f - (b + g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m - N - k) \quad (4.4-4)$$

现在，我们得到了一个相对复杂些的直接结果，要验证其正确性，检查结果的有效性，并寻找计算错误，我常以一两种特殊情况来检验其是否象我期望的那样，与此同时，也检查这阶段的计算错误，教会学生不断挑自己工作的不足很重要。例如我们在(4.4-4)中令 $P_0=1$ ，(对于一切实 $k \geq 1$, $P_k = 0$)来检查一下结果，这相当于旅客不能达到的偶然性为零，即所有订票上机的旅客都达到了。此时，(4.4-4)退化为：

$$\begin{aligned} \bar{S} &= (m - \bar{k})g - f - (b + g)(m - N) \\ &= Ng - f - b(m - N) \quad (\text{因为 } \bar{k} = 0) \end{aligned}$$

这表明，若飞机客容量为 N ， m 个旅客订了机票，且他们全到，利润将是满员飞行利润 $Ng - f$ 中去掉被挤掉留下的那部分旅客 $m - N$ 的耗费 $(m - N)b$ 。在这种情况下，当 $m=N$ 时，可得到最大平均利润，这与第一个简单模型一致。

为了得到(4.4-4)更具体的结果，进一步假设

$$P_k = C_m^k q^k p^{m-k}, \quad (4.4-5)$$

其中 q 和 p 分别表示任一旅客“未到”和“出现”的概率。

这样会有 $\bar{k}=qm$ ，而(4.4-4)变成：

$$\bar{S} = pmg - f - (b + g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m - N - k) \quad (4.4-6)$$

现在所要做的是如何使平均飞行利润最大。(4.4-6)式中，平均利润的表达式依赖于 g, b, f, q, m 和 N ，支付与赔偿费 f, g, b 不受航空公司短期控制的影响(这些费用是由IATA来规定的)， q 和 N 为外部限制，而只有订票水平 m 为航空公司的可控参数。

由(4.4-5)式知， P_k 随着订票水平 m 的变化而取不同的值，这些变化可手工计算。若有条件用计算机的话，应鼓励学生编一个程序来计算 g, b, f, q, N 和 m 任何组合下的期望利润。接着，在 g, b, f, q, N 的某个固定情况下，用它来决定最优的订票水平，若用手(或用一个非程序化计算器)来计算，我将首先同他们探讨所有简化后的可能情况，例如，若 N 充分大(对于Airbus为 $N \approx 300$ ，对于DC-10或Lockhead Tristar客机 $N \approx 350$ ，对于波音747有 N

≈ 450 ，用Poisson分布来代替这里的二项分布不会有太大差别。另一方面，(4.4-6)式部分和中的项数为 $m-N$ ，且为找到最优订票水平，部分和的项数必定随时 m 的增大而增多。从而工作量将会因一个小飞机（比如说80个座位feederliner）而减小。小型机超订10%时只有8项，相反，450个座位的喷气式飞机10%超订时的部分和却要加45项。

(4.4-6)式中部分和是 q, N, m 的函数，可写一个计算机程序来计算 q, N, m 给定值下的部和，由于期望利润是 q, m, g, f, b 和 N 的函数，航空公司要求以近似于60%的一个奇异载重因子来计算，也就是假定 $0.6Ng=f$ ，则

$$\frac{\bar{S}}{f} = \frac{1}{0.6N} \left[pm - \left(1 + \frac{b}{g}\right) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m-N-k) \right] - 1 \quad (4.4-7)$$

对于客容量为300的一个飞机，假定 $q=0.05, 0.1$ ，而 $\frac{b}{g}=0.2$ ，可编程并用计算机计算期望利润，且我们还可以计算 j 个或更多个旅客被挤掉的概率：

$$P(j\text{个或更多旅客被挤掉}) = \sum_{k=0}^{m-N-j} P_k$$

在此有一个好的练习供与学生一起讨论，那就是如何估计航空公司要支付的赔偿费 b 值，它可能由非常确定的直接费用和一些相对不明确的间接费用（象信誉与未来顾客减少所带来的损失）组成。由此将会引导出对敏感性的讨论，要取得问题的充分理解并估计模型预测中可能的错误，就要改变涉及的参量并观察输出相对于这些变化的敏感性。

还要考察的另一个有趣事情也许就是改变选择超订水平的准则。一个航空公司订票的准则应该是确定的。可假定其有较低的一定挤掉任何旅客的概率。并启用广告以强调其相对于所有竞争对手有最低的挤掉率。那么，要求学生给出这种经济表现的测量模型以估价这种策略。并比较这种设置超订水平策略下的期望利润与前述超订策略下可获得的最大期望利润。这自然地引导向多种准则决定的整体范围和无共同计量单位准则间的二分概率问题。

4) 再进一步的提炼

假若某次班机只是挤掉一两个旅客，可能可以保持平静，但一小组的不满意旅客会使航空公司当众出丑，而航空公司祝愿这种冒险越小越好，也许在公式化订票策略时，航空公司会采取一种策略，即取消低于极大期望利润但又可以使大数目旅客被挤掉的概率减少到可接受的程度的最优值。一种变通办法是努力想办法去增加实际出现旅客订到机票的可能性，这可以通过有APEX, ABC和其它特殊费方案来实现。用这种方案，旅客能以较低的票价得到仅

对某次班机有效的机票，若旅客未到，机票失效，旅客会损失掉这部分钱。显然，一些旅客（主要是做生意的旅客，在其计划内要求奢侈一些）将仍然准备付全费以保持这种奢侈，而其它的（主要是渡假者）将接受这种限制以减少耗费，这部分旅客将不会轻率地错过班机。因此我们可以假定他们“未到”的概率为零。则这部分旅客形成了一个固定的旅客基数，他们是可靠的上机者。

假定 j 个旅客以票价 rg 订了低价机票，那么，由 j 个低费旅客和 $m-k-j$ 个全费旅客产生的利润为：

$$S = \begin{cases} rjg + (m-j-k)g - f & m-k \leq N \\ rjg + (N-j)g - f - (m-k-N)b & m-k > N \end{cases}, \quad (4.4-8)$$

而 k 人未到的概率现在为 $m-j$ 个全费旅客中未到 k 人的概率，例如

$$P_k = C_{m-j}^k P^k q^{m-j-k} \quad (4.4-9)$$

飞行期望利润为：

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k [(N-j(1-r))g - f - (m-k-N)b] + \sum_{k=m-N}^m P_k [(m-k-j(1-r))g - f] \\ &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (N-m-k)g - (m-k-N)b + [(m-j(1-r))g - f] \sum_{k=0}^m P_k - g \sum_{k=0}^m k P_k \\ &= [m-j(1-r)]g - f - qmg - (b+g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k) \\ &= pmg - (1-r)jg - f - (b+g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k) \end{aligned} \quad (4.4-10)$$

这个式子能编程计算而用来解决 p, m, g, j, r, b, f 和 N 变化的影响，象前边一样，如果我们对飞行耗费 f 比全比率费用 g 的关系做出一个近乎实际的假设，这里的计算困难也可能减小，假定奇点载重时以适当比例混合的全费与低费旅客占了座位60%，从而，当低费旅客比例增时，因偿付全费的旅客比例减少了，全费用基数应相应增加，相应奇异条件就是：

$$0.6(jrg + (N-j)g) = f$$

即

$$\frac{g}{f} = \frac{1}{0.6(N - (1-r)j)}$$

因此，由（4.4-10）与此方程结合有等价于（4.4-7）的式子：

$$\frac{\bar{S}}{f} = \frac{1}{0.6(N - (1 - r)j)} [pm - (1 - r)j - (1 + \frac{b}{g}) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m - N - k)] - 1, \quad (4.4-11)$$

$\frac{\bar{S}}{f}$

同样编程即可用来计算这种情况下的 $\frac{\bar{S}}{f}$ 。现在，模型已被提炼成为这里的一个有充分多变量及参量的式了，并且表达方式实用而清楚，就建模本身而言，教导学生做到这一点很有益，在工业及商业环境中的数学家所需要有的技能之一就是以清楚而且通俗的方式为非数学家提供并表述他们的发现。

本文建立了模型却没有给出任何确定的结论，这只因为对许多外部参量没有做进一步的研究而不能定出其确定值。然而，本文着重说明了成功提炼而建立模型的过程，以及用模型来获取定量结果（如：趋势的与直觉的）并组织观察多变量函数参量变化的方法。

四、彩票中的概率问题

一、问题的提出

近年来“彩票飓风”席卷中华大地，巨额诱惑使越来越多的人加入到“彩民”的行列，目前流行的彩票主要有“传统型”和“乐透型”两种类型。

“传统型”采用“10选6+1”方案：先从6组0⁻9号球中摇出6个基本号码，每组摇出一个，然后从0⁻4号球中摇出一个特别号码，构成中奖号码。投注者从0⁻9十个号码中任选6个基本号码（可重复），从0⁻4中选一个特别号码，构成一注，根据单注号码与中奖号码相符的个数多少及顺序确定中奖等级。以中奖号码“abcdef+g”为例说明中奖等级，如表一（X表示未选中的号码）。

表一

中 奖 等 级	10 选 6+1 (6+1/10)		
	基 本 号 码	特别号码	说 明
一等奖	abcdef g		选7中（6+1）

二等奖	abcdef	选7中（6）
三等奖	abcdeX Xbcdef	选7中（5）
四等奖	abcdXX XbcdeX XXcdef	选7中（4）
五等奖	abcXXX XbcdXX XXcdeX XXXdef	选7中（3）
六等奖	abXXXX XbcXXX XXcdXX XXXdeX XXXXef	选7中（2）

“乐透型”有多种不同的形式，比如“33选7”的方案：先从01~33个号码球中一个一个地摇出7个基本号，再从剩余的26个号码球中摇出一个特别号码。投注者从01~33个号码中任选7个组成一注（不可重复），根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级，不考虑号码顺序。又如“36选6+1”的方案，先从01~36个号码球中一个一个地摇出6个基本号，再从剩下的30个号码球中摇出一个特别号码。从01~36个号码中任选7个组成一注（不可重复），根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级，不考虑号码顺序。这两种方案的中奖等级如表二。

表二

中 奖 等 级	33 选 7 (7/33)	36 选 6+1 (6+1/36)
基 本 号 码	● ● ● ● ● ● ●	● ● ● ● ● ●
特 别 号 码	○	★
说 明	选7中（7）	选6中（6+1）
二 等 奖	● ● ● ● ● ● ○ ★	● ● ● ● ● ●
三 等 奖	● ● ● ● ● ● ○	● ● ● ● ● ○ ★
四 等 奖	● ● ● ● ● ○ ○ ★	● ● ● ● ● ○
五 等 奖	● ● ● ● ● ○ ○	● ● ● ● ○ ○ ★
六 等 奖	● ● ● ● ○ ○ ○ ★	● ● ● ● ○ ○
七 等 奖	● ● ● ● ○ ○ ○	● ● ● ○ ○ ○ ★

注：●为选中的基本号码；★为选中的特别号码；○为未选中的号码。

以上两种类型的总奖金比例一般为销售总额的50%，投注者单注金额为2元，单注若已得到高级别的奖就不再兼得低级别的奖。现在常见的销售规则及相应的奖金设置方案如表三，其中一、二、三等奖为高项奖，后面的为低项奖。低项奖数额固定，高项奖按比例分配，但一等奖单注保底金额60万元，封顶金额500万元，各高项奖额的计算方法为：

$$[(\text{当期销售总额} \times \text{总奖金比例}) - \text{低项奖总额}] \times \text{单项奖比例}$$

(1) 根据这些方案的具体情况，综合分析各种奖项出现的可能性、奖项和奖金额的设置以及对彩民的吸引力等因素评价各方案的合理性。

(2) 设计一种“更好”的方案及相应的算法，并据此给彩票管理部门提出建议。

表三

序号	项 方案	一 等 奖 比 例	二 等 奖 比 例	三 等 奖 比 例	四 等 奖 金 额	五 等 奖 金 额	六 等 奖 金 额	七 等 奖 金 额	备 注
1	6+1/10	50%	20%	30%	50				按序
2	6+1/10	60%	20%	20%	300	20	5		按序
3	6+1/10	65%	15%	20%	300	20	5		按序
4	6+1/10	70%	15%	15%	300	20	5		按序
5	7/29	60%	20%	20%	300	30	5		
6	6+1/29	60%	25%	15%	200	20	5		
7	7/30	65%	15%	20%	500	50	15	5	
8	7/30	70%	10%	20%	200	50	10	5	
9	7/30	75%	10%	15%	200	30	10	5	
10	7/31	60%	15%	25%	500	50	20	10	
11	7/31	75%	10%	15%	320	30	5		
12	7/32	65%	15%	20%	500	50	10		
13	7/32	70%	10%	20%	500	50	10		
14	7/32	75%	10%	15%	500	50	10		
15	7/33	70%	10%	20%	600	60	6		
16	7/33	75%	10%	15%	500	50	10	5	
17	7/34	65%	15%	20%	500	30	6		
18	7/34	68%	12%	20%	500	50	10	2	
19	7/35	70%	15%	15%	300	50	5		
20	7/35	70%	10%	20%	500	100	30	5	

21	7/35	75%	10%	15%	1000	100	50	5	
22	7/35	80%	10%	10%	200	50	20	5	
23	7/35	100%	2000	20	4	2			无特别号
24	6+1/36	75%	10%	15%	500	100	10	5	
25	6+1/36	80%	10%	10%	500	100	10		
26	7/36	70%	10%	20%	500	50	10	5	
27	7/37	70%	15%	15%	1500	100	50		
28	6/40	82%	10%	8%	200	10	1		
29	5/60	60%	20%	20%	300	30			

二、符号说明与基本假设

1、符号说明

r_0 ——总奖金比例（本题中 $r_0 = 50\%$ ）

t_0 ——单注金额（本题中 $t_0 = 2(\text{元})$ ）

N ——彩票销售总量（张）

p_{ij} ——第 i 种彩票的第 j 等奖项的中奖概率

v_{ij} ——第 i 种彩票的第 j 等奖项的奖金额

M_B ——保底金额（60万）

M_F ——封顶金额（500万）

a_i ——单项奖比例（ $i=1,2,3$ ）

2、基本假设

- （1）只考虑同一地区的彩票发行问题。
- （2）在同一个地区里，在很长一段时期内，人的心性是不会改变的。
- （3）只分析同一地区，不考虑经济差别的因素。

三、问题的分析

对于问题一，题目要求给出彩票合理性的评价准则，为此，我们必须明确以下三个问题：

- ①什么叫做合理；
- ②影响合理性的因素有哪些；
- ③这些因素是如何影响合理性的。

对于①，我们有如下结论：

定理 1 彩票发行的合理性与彩票对彩民的吸引力是等价的。

证明 就彩票公司而言，发行彩票的主要目的是追求利润，在 r_0 与 t_0 一定的前提下，其利润只与 N 有关，显然 N 越大，彩票公司可以获得的利润也越大，彩票发行也就越合理。而影响 N 的因素就是该彩票对彩民的吸引力，吸引力越大， N 越大，该彩种也就越合理。

对于②，在定理一的基础上，显然可以得到下面的推论：影响合理性的因素等价于影响吸引力的因素。

就影响吸引力的因素而言，我们可以从分析彩民购买彩票的心理入手。对于彩民来说，影响他购买彩票的主要因素有：①一等奖的奖金；②中奖率；③低等奖的奖金额。由于中一等奖的概率非常低，因此一等奖的概率对彩民的影响是极其微小的，相对于上面的三个因素而言，可以忽略。

四、模型的建立与求解

(一) 彩民获各奖项的概率

用 q 表示彩票， $G_n(q)$ 表示 q 是获第 n 等奖的彩票。

a. “传统型”彩票的概率计算。

对于“传统型”彩票，由于各个奖项之间的相互影响，如果采用排列组合的方法来求解的话，会使问题变得很复杂以至很难求解。因此，我们采用了计算机编程，编制了一个与 $G_n(q)$ 作用相同的函数，运用枚举法，方便的解决了“传统型”彩票的概率计算问题。运算结果如下表所示：

表一、“传统型”彩票奖项中奖的概率

中奖等级	一等奖	二等奖	三等奖	四等奖	五等奖	六等奖
中奖概率	2.00E-07	8.00E-07	1.80E-05	0.000261	0.00342	0.042039

b. “乐透型”彩票的概率计算。

对于“乐透型”彩票的概率的计算，我们可采用简单的排列组合来求解。其计算公式如

下:

n/m 型:

$$p_1 = \frac{1}{C_n^m}, \quad p_2 = \frac{C_m^{m-1}}{C_n^m}, \quad p_3 = \frac{C_m^{m-1}C_{n-(m+1)}^1}{C_n^m}, \quad p_4 = \frac{C_m^{m-2}C_{n-(m+1)}^1}{C_n^m},$$
$$p_5 = \frac{C_m^{m-2}C_{n-(m+1)}^2}{C_n^m}, \quad p_6 = \frac{C_m^{m-3}C_{n-(m+1)}^2}{C_n^m}, \quad p_7 = \frac{C_m^{m-3}C_{n-(m+1)}^3}{C_n^m}.$$

$n+1/m$ 型:

$$p_1 = \frac{1}{C_n^{m+1}}, \quad p_2 = \frac{C_{n-(m+1)}^1}{C_n^{m+1}}, \quad p_3 = \frac{C_m^{m-1}C_{n-(m+1)}^1}{C_n^{m+1}}, \quad p_4 = \frac{C_m^{m-1}C_{n-(m+1)}^2}{C_n^{m+1}},$$
$$p_5 = \frac{C_m^{m-2}C_{n-(m+1)}^2}{C_n^{m+1}}, \quad p_6 = \frac{C_m^{m-2}C_{n-(m+1)}^3}{C_n^{m+1}}, \quad p_7 = \frac{C_m^{m-3}C_{n-(m+1)}^3}{C_n^{m+1}}.$$

按照上面的概率计算方法，我们可以得到下面的一个概率表：表二

表二：概率表

奖项 概率 序号	一 等 奖	二 等 奖	三 等 奖	四 等 奖	五 等 奖	六 等 奖	七 等 奖
1	2.00E-07	8.00E-07	1.80E-05	0.000261	未设奖	未设奖	未设奖
2	2.00E-07	8.00E-07	1.80E-05	0.000261	0.00342	0.042039	未设奖
3	2.00E-07	8.00E-07	1.80E-05	0.000261	0.00342	0.042039	未设奖
4	2.00E-07	8.00E-07	1.80E-05	0.000261	0.00342	0.042039	未设奖
5	6.40E-07	4.48E-06	9.42E-05	0.000283	0.002826	0.004709	未设奖
6	6.40E-07	1.41E-05	8.46E-05	0.000888	0.00222	0.0148	未设奖
7	4.90E-07	3.44E-06	7.57E-05	0.000227	0.002383	0.003971	0.026476
8	4.90E-07	3.44E-06	7.57E-05	0.000227	0.002383	0.003971	0.026476
9	4.90E-07	3.44E-06	7.57E-05	0.000227	0.002383	0.003971	0.026476
10	3.80E-07	2.66E-06	6.12E-05	0.000184	0.002021	0.003368	0.023572
11	3.80E-07	2.66E-06	6.12E-05	0.000184	0.002021	0.003368	未设奖
12	3.00E-07	2.08E-06	4.99E-05	0.00015	0.001722	0.00287	未设奖
13	3.00E-07	2.08E-06	4.99E-05	0.00015	0.001722	0.00287	未设奖

14	3.00E-07	2.08E-06	4.99E-05	0.00015	0.001722	0.00287	未设奖
15	2.30E-07	1.64E-06	4.10E-05	0.000123	0.001475	0.002458	未设奖
16	2.30E-07	1.64E-06	4.10E-05	0.000123	0.001475	0.002458	0.018843
17	1.90E-07	1.30E-06	3.38E-05	0.000101	0.001269	0.002115	未设奖
18	1.90E-07	1.30E-06	3.38E-05	0.000101	0.001269	0.002115	0.016916
19	1.50E-07	1.04E-06	2.81E-05	8.43E-05	0.001096	0.001827	未设奖
20	1.50E-07	1.04E-06	2.81E-05	8.43E-05	0.001096	0.001827	0.015224
21	1.50E-07	1.04E-06	2.81E-05	8.43E-05	0.001096	0.001827	0.015224
22	1.50E-07	1.04E-06	2.81E-05	8.43E-05	0.001096	0.001827	0.015224
23	1.49E-07	2.91E-05	0.001181	0.017051	0.10657	未设奖	未设奖
24	1.20E-07	3.47E-06	2.08E-05	0.000292	0.00073	0.006566	0.008755

(二) 合理性的综合评价模型

根据问题分析可知，一等奖的奖金额效用、中奖率、低等奖的奖金额都是评价彩票吸引力的指标。记各个指标分别为 x_{j1} （一等奖奖金额效用）， x_{j2} （中奖率）， x_{j3} （低等奖的金额），各彩种的指标数据矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{s,1} & x_{s,2} & x_{s,3} \end{bmatrix}$$

其中， $x_{ij} \geq 0 (i=1,2,\cdots,s, j=1,2,3)$ 表示序号为 i 的彩票的第 j 项指标数据。记决策向量为 $d_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ 。

1、 x_{ij} 的确定

(1) $j=1$ 时，一等奖的奖金 v_{i1} （单注期望值）

根据题中给出的计算高等奖的奖金总额公式，

$$[(\text{当期奖金总额} \times \text{总奖金比例}) - \text{低项奖总额}] \times \text{单项奖比例}$$

我们可以得到 v_{ij} 的计算公式

$$v_{ij} = \frac{(t_0 N r_0 - N \sum_l p_{il} v_{il}) \cdot a_1}{N p_{il}} = \frac{(t_0 r_0 - \sum_l p_{il} v_{il}) \cdot a_1}{p_{il}}$$

显然， v_{i1} 从100变到200比从400变到500对彩民的吸引力要大得多。一等奖奖金额效用这一指标是一个典型的模糊概念。由模糊数学隶属度的概念和决策分析理论的知识，我们需求出它的效用函数。对于一等奖的而言，彩民能够拿到封顶金额 $M_F = 500$ 万时，彩民的满意度（效用）为100%即1，当彩民只能拿到保底金额 $M_B = 60$ 万时，效用为0。我们可以通过一种效用函数曲线的经验求法，求出本题的效用函数。记 $U(x)$ 为效用函数，满足条件（1）、（2）：

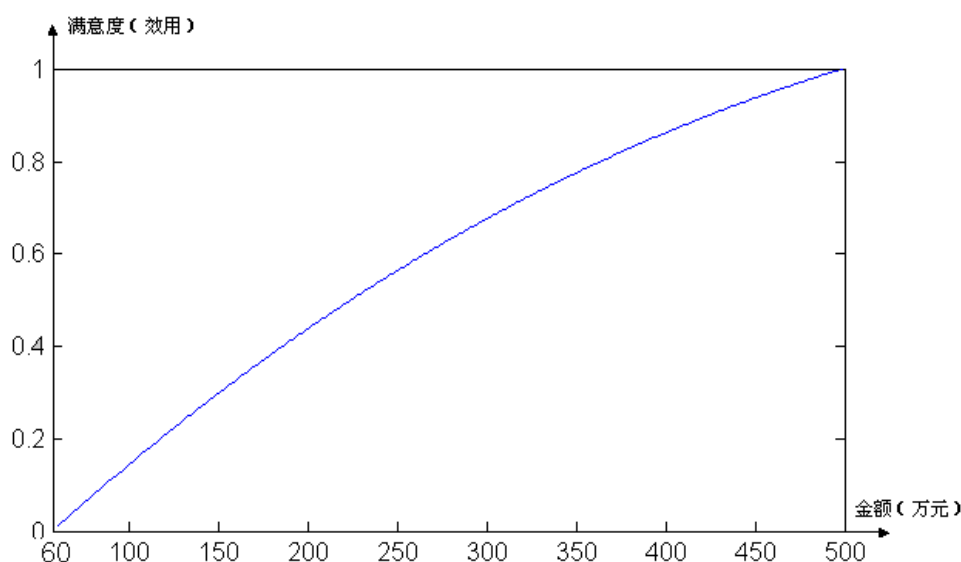
$$\frac{dU}{dx} = \frac{a}{x+b} > 0, \quad \frac{d^2U}{dx^2} < 0 \quad (1)$$

$$U(5 \times 10^6) = 1, U(3 \times 10^6) = 0.5 \quad U(0.6 \times 10^6) = 0 \quad (2)$$

则由方程组（1）及条件（2）利用Mathematic可解得效用函数：

$$U(x) = 7.315 - 2.742 \ln|x - 15|$$

效用函数曲线图如下：



效用函数曲线图

根据这一效用函数以及 v_{i1} 的计算，我们可以得到 $x_{i1} = U(v_{i1})$ ($i = 1, 2, \dots, s$)。

(2) $j = 2$ 指标 x_2 是指所有奖项的中奖概率之和。即 $x_{i2} = \sum_{j=1}^k p_{ij}$ (k 为奖项等级)

(3) $j=3$ 对于低等奖的奖金额这一指标，在同等程度提高末等奖与四等奖的奖金额情况下，后者对彩民的吸引力更大。因此，低等奖的奖金总额指标可以简化为四等奖的资金额与获四等奖的概率的乘积。即 $x_{i3} = p_{i4}v_{i4}$ 。

至此我们将三种指标 x_{j1}, x_{j2}, x_{j3} 转化为一等奖的奖金效用 $U(v_{i1})$ ，获奖概率和

$\sum_{j=1}^k p_{ij}$ ，四等奖的奖金额与四等奖的概率之积 $v_{i4} p_{i4}$ ($i=1,2,\dots,s$)。并得到了各彩种的指标数据矩阵 $X = (x_{ij})_{s \times 3}$ ($i=1,2,\dots,s; j=1,2,3$)。

2、三种指标的权值的确定

显然，每一种指标对彩民的吸引力的影响度是不同的，对于各个指标的权值具体确定，我们可以利用层次分析法的内容来给出，这在以后再进行讨论。在这里，由假设一与假设二

的前提， w_i 可以认为是一个定值且不妨设 $w_1 > w_2 > w_3$ ， $\sum_{s=1}^3 w_s = 1$ 。在本题中我们给定 $w_1 = 0.6$ ， $w_2 = 0.3$ ， $w_3 = 0.1$ 。

3、综合评价

(1)指标的无量纲化

首先将指标数据无量纲化。这里，我们采用极差正规法消去数据的量纲。令

$$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_{1 \leq i \leq s} \{x_{ij}\}}{\max_{1 \leq i \leq s} \{x_{ij}\} - \min_{1 \leq i \leq s} \{x_{ij}\}} \quad (i=1,2,\dots,s; j=1,2,3)$$

经无量纲化后，指标数据矩阵 X 化成了决策矩阵 $Y = (y_{ij})_{s \times 3}, y_{ij} \in [0,1]$ 。

(2)给指标赋权

用前面求出的指标的权重对决策矩阵 Y 进行加权处理。令 $z_{ij} = w_j y_{ij}$ ，得到赋权后的决策矩阵 $Z = (z_{ij})_{s \times 3}, (i=1,2,\dots,s; j=1,2,3)$ 。决策向量设为 $\bar{d}_i = (z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}), i=1,2,\dots,s$

(3)求出期望决策和决策投影，进行综合评价

构造理想决策向量 $d^* = (d_1, d_2, d_3)$ ，其中 $d_j = \max_{1 \leq i \leq s} \{z_{ij}\}, j=1,2,3$ 。将 d^* 单位化得：

$$d_0^* = \frac{1}{\|d^*\|} d^* = \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} d^*.$$

再求出各决策向量在理想决策向量方向上的投影:

$$D_i = d_i \cdot d_0^* = \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \sum_{j=1}^3 d_j u_{ij}, i = 1, 2, \dots, s.$$

以各决策向量的投影值 D_i 作为各种彩票方案综合评价值, 按越大越好的原则, 可得到给出的 24 种彩票的最终的评价结果。

表五: 吸引力综合指标表及其排序表

表五:

指 标 方 案		D	排 序
9	7/30	0.5397	1
11	7/31	0.5363	2
5	7/29	0.5048	3

三) “更好” 的彩票发行方式的制定模型

对某一具体彩种 (m 选 n) 发行方案的好与坏的分析, 我们依然从一等奖的奖金效用、中奖率、四等奖的中奖概率与奖金额之积这三个指标加以分析。显然这三个指标的值越大, 此种发行方案就是一种 “更好” 的方案。

记 $f_1 = U(v_1)$, $f_2 = \sum_{i=1}^k p_i$, $f_3 = p_4 v_4$, 则目标为:
$$\begin{cases} f_1 = \max \\ f_2 = \max \\ f_3 = \max \end{cases}$$

这是一个多目标规划问题。我们采用常规的对 f_i 加权处理的方法, 将多目标规划转化为单目标规划, 其中 f_i 的权就是 w_i , 即 $\sum_i w_i f_i = \max$ 。

下面我们分析这一目标的约束条件:

- ①对于总奖金比例 r_0 , 单张彩票的价格 r_0 一定的彩种来说, 其单张彩票的期望值
- $$\sum_{i=1}^k p_i v_i = t_0 \times r_0 = 2 \times 50\% = 1$$
- ②就低等奖而言, 考察 i 与 $i+1$ 这两个相邻的等级, 虽然 $i+1$ 等奖的奖金额比 i 等奖要小, 但是由于中奖人数比 i 等奖的中奖人数要大得多。因此, $i+1$ 等奖的奖金总

额比 i 等奖的要多, 即 $p_i v_i \leq p_{i+1} v_{i+1}, (i = 4, 5, \cdots, k-1)$ 。

③对于某一确定的彩种(m 选 n), 它的奖项等级的设置 k 最多不应超过 n , 即 $k \leq n$ 。
比如, 35选7, 那么最多就只有7等奖。这与原题中给出的数据也是相当吻合的。

④对于最低的一等奖即 k 等奖, 其奖金额 v_k , 我们可以根据在模型2中得到的效用函数得到 $v_k = 5$ 元, 这与现实中的彩票发行情况也是相当吻合的。

⑤显然奖项等级越高, 奖金额越大, 即 $v_i > v_{i+1}$ 。
根据上面的分析, 我们可以将这一问题转化为如下的一个单目标规划模型:

$$\begin{aligned} \max &= w_1 u(v_1) + w_2 \sum_{i=1}^k p_i + w_3 p_4 v_4 \\ \text{s.t.} &\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^k p_i v_i = 2 \times 50\% = 1 \\ &p_i v_i \leq p_{i+1} v_{i+1} \quad (i = 4, 5, \cdots, k-1) \\ &v_{i+1} < v_i \quad (i = 4, 5, \cdots, k-1) \\ &k \leq n \\ &v_k = 5 \\ &w_1 < w_2 < w_3 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

模型的求解

对于上面目标规划问题, 我们可以借助于经典的求解单目标规划的方法进行求解。对于每一个具体的彩种, 我们可以利用上面的模型得到一个“更好”的方案。有了这些方案, 我们可以制定一个如下的表格:

表六: 较优方案表

序号	奖项 获奖 方案	一 等 奖 比 例	二 等 奖 比 例	三 等 奖 比 例	四 等 奖 金 额	五 等 奖 金 额	六 等 奖 金 额	七 等 奖 金 额	备 注
1	6+1/10	80%	10%	10%	400	20	5	0	按序
2	7/29	80%	5%	15%	300	25	15	5	
3	6+1/29	75%	12%	13%	250	25	5	0	
4	7/30	70%	10%	20%	500	50	15	5	
5	7/31	72%	10%	18%	500	50	20	5	

