

国家需要多少个洲际导弹基地

因为现代战争的需要，许多国家都有洲际导弹基地。考虑到未来战争升级的可能性，那么需要有多少个洲际导弹基地才能适应未来战争的需要呢？设世界上需要洲际导弹才能攻击的目标有 n 个，而我们拥有 m 个洲际导弹基地。 m 太小则可能无法应付未来战争的需要， m 太大又会引起投入军费的增多，以至过于影响经济发展。假设在任一时刻，这 n 个目标是否需要攻击是相互独立的，且需要攻击的概率是 p ，现在要求“在任一时刻每个洲际导弹需要攻击的目标不超过 s 个”这一事件的概率不小于 α （ α 一般取 0.90 或 0.95），则至少需要拥有多少个洲际导弹基地？

利用二项分布可以把问题具体化。

设事件 A_k 表示在任一时刻恰有 k 个目标需要攻击， $k=1,2,\dots,sm$ 。于是事件 A_k 的概率为

$$P(A_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

由于 $A_0, A_1, \dots, A_{sm}$ 为两两互斥的事件，所以

$$\sum_{k=0}^{sm} P(A_k) = \sum_{k=0}^{sm} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \geq \alpha$$

找一个最小的自然数 m ，使上面的不等式成立，此 m 就是本问题的答案。

上述方法虽然把问题具体化了，但在求 m 时，困难太大。这时我们换个角度来看这个问题。设随机变量 η_n 为任一时刻洲际导弹基地需要攻击的总目标数，则 $\eta_n \sim b(n, p)$ 。于是由德莫佛-拉普拉斯中心极限定理得，

$$P\{\eta_n \leq sm\} \approx \Phi\left(\frac{sm - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq \alpha$$

进而有

$$m \approx \frac{np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}}{s}$$

由于 m 是自然数，所以进一步取整加 1，即

$$m \approx \left\lceil \frac{np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}}{s} \right\rceil + 1$$