

《线性代数》期末试卷（十三）答案

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

（×）1. 任何两个矩阵都可以相加.

（×）2. 若矩阵 A, B, C 满足 $BA = CA$ ，而且 $A \neq O$ ，则 $B = C$.

（√）3. 设 A 为 n 阶方阵， b 为 n 维列向量，若行列式 $|A| \neq 0$ ，则线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

（√）4. 设 $\alpha = (1, 1)$ ， $\beta = (-2, 3)$ ，则 $\alpha\beta^T = 1$.

（×）5. 集合 $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in R \right\}$ 不是一个向量空间.

二、填空题（每小空3分，共15分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & -21 \end{pmatrix}$ 的等价标准形矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ， E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$ ，则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案: 2

4. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: -1

5. 与向量 $\alpha_1 = (1, -1, -1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, -1)^T$ 正交的非零向量为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $(1, 0, 1)^T$

三、单项选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 下列选项中不属于五阶行列式 $|a_{ij}|$ ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) 中的一项是 ().

A. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$ B. $-a_{51}a_{12}a_{43}a_{34}a_{25}$ C. $-a_{13}a_{52}a_{34}a_{21}a_{45}$ D. $a_{55}a_{44}a_{33}a_{22}a_{11}$

答案: C

2. 设线性方程组的增广矩阵为 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 若线性方程组无解, 则 λ 为 ().

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

答案: D

3. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, $|B| = -2$, 则 $|2A^*B^{-1}| = ()$.

A. 1 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

答案: B

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为 ().

A. 3 B. 1 C. 0 D. 2

答案: B

5. 设 $\alpha_1 = (1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1)^T$, $\alpha_4 = (0, 0)^T$, 则下列不是该向量组的极大线性无关组的是 ().

A. α_1, α_3 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_2, α_3

答案: C

6. 设 $\alpha = (1, 2, 3)^T$, 则 α 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (1, 1, 0)^T, e_3 = (1, 1, 1)^T$ 下的坐标是 ().

A. $(1, 2, 3)^T$ B. $(1, 1, -3)^T$ C. $(-1, -1, 3)^T$ D. $(1, 1, 1)^T$

答案: C

7. 假设 A, B 都是可逆矩阵, 则矩阵方程 $AXB = C$ 的解为 ().

A. $X = A^{-1}CB^{-1}$ B. $X = CA^{-1}B^{-1}$ C. $X = CB^{-1}A^{-1}$ D. $X = B^{-1}A^{-1}C$

答案: A

8. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Q 为 2 阶正交矩阵, 且 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $Q =$ ().

A. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

答案: D

四、计算题 (共 6 小题, 共 51 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

解: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (2 分)

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -8 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (4 分)

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -3 \\ -7 & -4 & 8 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -2(-16-12) = 56 \quad (7 \text{ 分})$$

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 的值. (7 分)

解: $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分})$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 4 \quad (7 \text{ 分})$$

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7 分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 则 A 可逆. (2 分)

$$\text{构造矩阵 } (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

4. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解. (10 分)

解: 已知方程组是四元, 且 $R(A) = 3$, 则由非齐次线性方程组解的结构知, 导出组的基础解析中仅含有一个向量, 设为 ξ (3 分)

$$\xi = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = (2, 4, 6, 8)^T - (2, 3, 4, 5)^T = (0, 1, 2, 3)^T \quad (6 \text{ 分})$$

又因为非齐次线性方程组有特解 $\eta_1 = (1, 2, 3, 4)^T$ (8 分)

则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = \eta_1 + k\xi$, $k \in \mathbf{R}$ (10 分)

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

解: A 的特征多项式为 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(3-\lambda)$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ (4 分)

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 解方程 $(A + E)x = O$. 由

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (0, 0, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $k\alpha_1$ (常数 $k \neq 0$). (7 分)

当 $\lambda_3 = 3$ 时, 解方程 $(A - 3E)x = O$. 由

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$

从而对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量为 $k\alpha_2$ (常数 $k \neq 0$). (10 分)

6. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基分别为 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 和 $\beta_1 = (1, 2, 1)^T$, $\beta_2 = (2, 3, 4)^T$, $\beta_3 = (3, 4, 3)^T$, 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵. (10 分)

解: 设从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P . (1 分)

则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$ (2 分)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad (8 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$