

《线性代数》第四章 向量组的线性相关性 测试试卷(四)

姓名_____学号_____得分_____

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $R(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下列命题正确的是()

- A. A 的任意一个 m 阶子式不为零 B. A 的任意 m 个列向量必线性无关
C. 若矩阵 B 满足 $BA=0$, 则 $B=0$ D. A 通过初等行变换必可化为 $(E_m, 0)$ 的形式

2. 设有 m 维向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 则()

- A. 当 $m > n$ 时, (I) 一定线性无关 B. 当 $m < n$ 时, (I) 一定线性无关
C. 当 $m < n$ 时, (I) 一定线性相关 D. 当 $m > n$ 时, (I) 一定线性相关

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $a =$ ()

- A. -1 B. 1 C. 2 D. -2

4. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A|=0$, 则()

- A. A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合
B. A 中任一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合
C. A 中必有两行(列)的对应元素成比例
D. A 中至少有一行(列)的元素全为零

5. 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 3, -1)^T$, $\alpha_2 = (2, t, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (-2, 3, 1, t+1)^T$
则()

- A. 对任意 t , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 B. 仅当 $t = -3$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
C. 若 $t = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 D. $t \neq 0$ 且 $t \neq -3 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

6. 若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解, 则其导出组 $Ax=0$ ()

- A. 必定无解 B. 必有唯一解 C. 必有无穷多解 D. 有任意解

7. 已知向量组(I) $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \end{cases}$ 与方程组(II)同解, 则 a, b, c 的值为 ()

A. $a=1, b=4, c=4$

B. $a=-1, b=-4, c=4$

C. $a=1, b=-4, c=-4$

D. $a=-1, b=4, c=-4$

8. 设三维列向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 若令 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$B=(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$, 如果 $|A|=1$, 那么 $|B|=()$

A. 2

B. 5

C. 8

D. 12

9. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中 () 也线性无关

A. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$

B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$

C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

D. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

10. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系是 ()

A. $(1, 1, 1)^T$ B. $(1, 0, 1)^T$ C. $(4, 4, 4)^T, (0, 1, 1)^T$ D. $(2, 2, 2)^T, (1, 1, 0)^T$

11. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 ()

A. $|A|=0$

B. $R(A) < n$

C. $m > n$

D. $m < n$

12. 下列集合中, 构成 R 上的向量空间的是 ()

A. $V_1 = \{ \alpha \mid \alpha = (x_1, 0, x_3)^T \in R^3, x_1, x_3 \in R \}$

B. $V_2 = \{ \alpha \mid \alpha = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3, x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \}$

C. $V_3 = \{ \alpha \mid \alpha = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \}$

$$D. V_4 = \left\{ \alpha \mid \alpha = (x_1, x_2, 2)^T \in R^3, x_1, x_2 \in R \right\}$$

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$, 则 $2\alpha_1 - 3\alpha_2$ _____.

2. 已知向量组 $\beta_1 = (0, 1, -1)^T$, $\beta_2 = (a, 2, 1)^T$, $\beta_3 = (b, 1, 0)^T$

与向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -3)^T$, $\alpha_2 = (3, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (9, 6, -7)^T$ 具有相同的秩,

且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $a =$ _____.

3. 向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 3, 3)^T$ 的秩为 _____.

4. 当参数 $t =$ _____ 时, 向量组 $\alpha_1 = (2, -1, 2, 5)^T$, $\alpha_2 = (1, t, 0, 3)^T$,

$\alpha_3 = (5, 5, 2, 14)^T$ 线性相关 _____.

5. 当 $\lambda =$ _____ 时, 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$
 无解.

6. 如果线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \lambda - 1 \\ 3x_2 - x_3 = \lambda - 2 \\ \lambda x_2 - x_3 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) + (\lambda - 2) \end{cases}$$
 有无穷多解, 则 $\lambda =$ _____.

三、简答题（共 40 分）

1. 设向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 4)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (a, 2, 10)^T$,

$\beta = (1, 0, b)^T$, 当 a, b 满足什么条件时 (10 分)

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一;

(2) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 写出一般表达式;

2. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1, 0)^T$, $\alpha_4 = (0, 1, 1, 1)^T$ 的一个基, 以及 $\alpha = (1, 1, 2, 1)^T$ 在该基下的坐标. (10 分)

3. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$
 的通解. (10 分)

4. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 2, 已知它的 3 个解向量为 η_1, η_2, η_3 , 其中 $\eta_1 = (4, 3, 2, 1)^T$, $\eta_2 = (1, 3, 5, 1)^T$, $\eta_3 = (-2, 6, 3, 2)^T$ 的通解. (10 分)