

《线性代数》模拟试卷（十二）答案

一、判断题 . (每小题 2 分, 共 10 分)

(×) 1. 若行列式的值为零, 则行列式必有两行对应元素相等.

(√) 2. n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的任意一列的各元素与其对应代数余子式乘积的和.

(×) 3. 对于任意两个矩阵 A, B , AB 一定有意义.

(√) 4. 一个非零向量一定线性无关.

(√) 5. 齐次线性方程组一定有解.

二、填空题 . (每小题 4 分, 共 16 分)

1. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案: 0

2. 设 A 为三阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 求 $|2A|A^T| = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案: 128

3. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案: $\begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 23 & 23 \end{pmatrix}$

4. 向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 2), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (2, 3, 1), \alpha_4 = (3, 5, 2)$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案: 2

三、选择题 . (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分条件是 (C).

A. $k \neq -1$

B. $k \neq -3$

C. $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$

D. $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

2. 若行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 则行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} - 3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} - 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (B)$.

- A. 12 B. -12 C. -1 D. 1

3. 设有矩阵 $A_{3 \times 2}, B_{2 \times 3}, C_{3 \times 3}$, 下列矩阵运算可行的是 (B).

- A. AC B. ABC C. BAC D. $AB - BC$

4. 如果线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)x_3 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{cases}$$
 无解, 则 $\lambda =$ (C).

- A. 5 B. 0 C. 1 或 2 D. 2

5. 下列矩阵中与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形不相同的是 (C).

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. 向量组 $\alpha_1 = (3, 1, a)^T, \alpha_2 = (4, a, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, a)^T$ 线性无关, 则 a 应满足的条件 (A).

- A. $a = 0$ 或 2 B. $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ C. $a = 1$ 或 $a = 2$ D. $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$

7. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (2, 3, 1), \alpha_3 = (2, 4, 2), \alpha_4 = (3, 5, 2)$, 下列是该向量组的极大线性无关组的是 (A).

- A. α_1, α_2 B. α_1, α_3 C. α_1, α_4 D. α_2, α_3

8. 三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 3, -2$, 则下列矩阵中是非奇异矩阵的是 (A).

- A. $2I - A$ B. $2I + A$ C. $I - A$ D. $A - 3I$

四、计算题 . (共 50 分)

1. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$
 的值 . (7 分)

$$\text{解: 原式} = \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= 2(x+y) \begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix} = 2(x+y)[-x^2 + y(x+y)] = -2(x^3 + y^3) \quad (7 \text{ 分})$$

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ 的秩 $r(A) = 2$, 求 λ . (8 分)

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

因为 $r(A) = 2$, 所以阶梯型矩阵有两个非零行, 故 $\lambda-1=0$, 即 $\lambda=1$. (8 分)

3. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵. (10 分)

$$\text{解: 因为 } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ 所以矩阵 } A \text{ 可逆.}$$

作 3×6 矩阵 $(A:I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3:1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0:0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1:0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0:0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3:1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1:0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 (5 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0:0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1:0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1:1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$
 (6 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0:1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0:1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1:-1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
 (8 分)

于是得到 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ (10 分)

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量 . (10 分)

解：矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$
 (1 分)

化简得 $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$, 所以 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 是矩阵 A 的特征值。 (4 分)

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解齐次线性方程组 $(2I - A)\mathbf{x} = 0$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得它的基础解系是 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩阵 A 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量是

$$c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}) \quad (7 \text{ 分})$$

当 $\lambda_3 = -1$ 时，解齐次线性方程组 $(-I - A)x = 0$

$$-I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得它的基础解系为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所以矩阵 A 对应于 $\lambda_3 = -1$ 的全部特征向量为

$$c_3 \alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \text{ 为任意常数}) \quad (10 \text{ 分})$$

5. 用基础解系表示线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$ 的全部解 . (15 分)

解： $\because m = 4, n = 5, m < n$, 因此所给方程组有无穷多解，对增广矩阵 $(A:0)$ 施以初等行变换：

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})
\end{aligned}$$

即原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量。 (8 分)

让自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，得方程组的一个解

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 就是所给方程组的一个基础解系。(12 分)

因此所给方程组的全部解为

$$\mathbf{x} = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } c_1, c_2, c_3 \text{ 为任意常数。} (15 \text{ 分})$$