

第6章 数理统计基础

(A)

一、填空题

1. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则样本均值 $\bar{X} =$ _____; 样本方差 $S^2 =$ _____; 样本的 k 阶 (原点) 矩 $A_k =$ _____; 样本的 k 阶中心矩 $B_k =$ _____.

2. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 则 $E(\bar{X}) =$ _____; $D(\bar{X}) =$ _____.

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 服从自由度为 _____ 的 _____ 分布.

4. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 则 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ 服从 _____ 分布; $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}$ 服从 _____ 分布; $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从 _____ 分布; $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$ 服从 _____ 分布.

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的容量为 $n+m$ 的样本, 则统计量 $\frac{m \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$ 服从的分布是 _____.

6. 设 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$, X 与 Y 独立, 则随机变量 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 _____ 的 _____ 分布.

7. 设总体 $X \sim P(\lambda)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, $\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值及样本方差, 则 $E(\bar{X}) =$ _____; $E(S^2) =$ _____.

8. $z_{0.015} =$ _____; $z_{0.95} =$ _____; $t_{0.1}(10) =$ _____; $\chi_{0.025}^2(25) =$ _____; $t_{0.025}(50) =$ _____; $F_{0.05}(12, 10) =$ _____; $F_{0.95}(14, 16) =$ _____.

9. 设总体 X 服从正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}} .$$

10. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, (-\infty < x < +\infty)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $E(S^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题

1. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其中 μ 已知, σ^2 未知, 则下列表达式不是统计量的是 ().

(A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ (C) $\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ (D) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$

2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 令 $Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $Y \sim (\quad)$.

(A) $\chi^2(n)$ (B) $N(\mu, \sigma^2)$ (C) $\chi^2(n-1)$ (D) $N(\mu, \sigma^2/n)$

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(0, 1)$ 的样本 ($n > 1$), $\bar{X}$ 与 S^2 分别是样本均值和样本方差, 则有 ().

(A) $\bar{X} \sim N(0, 1)$ (B) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$

(C) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$ (D) $\frac{\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自总体 $N(2, \sigma^2)$ 的样本, 则 $\frac{4\bar{X} - 8}{\sigma} \sim (\quad)$.

(A) $t(15)$ (B) $t(16)$ (C) $\chi^2(15)$ (D) $N(0, 1)$

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的样本, $Y^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i^2$, 则 ().

(A) $X^2 \sim \chi^2(1)$ (B) $Y^2 \sim \chi^2(10)$ (C) $\frac{X}{Y} \sim t(10)$ (D) $\frac{X^2}{Y^2} \sim F(1, 10)$

6. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则 ().

(A) $X + Y$ 服从正态分布. (B) $X^2 + Y^2$ 服从 χ^2 分布.
(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布. (D) X^2/Y^2 服从 F 分布.

7. 设随机变量 $X \sim t(n) (n > 1)$, $Y = \frac{1}{X^2}$, 则 ().

(A) $Y \sim \chi^2(n)$ (B) $Y \sim \chi^2(n-1)$ (C) $Y \sim F(n, 1)$ (D) $Y \sim F(1, n)$

8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 是来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, 则 ().

(A) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$ (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

$$(C) \frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$$

$$(D) \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$$

三、解答题

1. 已知总体 $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的一个样本, 求

(1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合分布律;

(2) $\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布律;

(3) $E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$.

2. 从总体 $N(52, 6.3^2)$ 中随机抽取一个容量为 36 的样本, 计算样本均值 $\bar{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率.

3. 某种灯管寿命 X (以小时计) 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X}$ 为来自总体 X 的样本均值.

(1) 求 $\bar{X}$ 与 μ 的偏差大于 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ 的概率.

(2) 若 μ 未知, $\sigma^2 = 100$, 现随机取 100 只这种灯管, 求 $\bar{X}$ 与 μ 的偏差小于 1 的概率.

4. 在天平上反复称量重量为 w 的物体, 每次称量结果独立同服从 $N(w, 0.04)$, 若以 $\bar{X}$ 表示 n 次称重的算术平均, 则为使 $P\{|\bar{X} - w| < 0.1\} > 0.95$, n 至少应该是多少?

5. 从正态总体 $N(\mu, 0.5^2)$ 中抽取样本 $X_1, X_2, \dots, X_{10}$

(1) 已知 $\mu = 0$, 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4\right\}$;

(2) μ 未知, 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 \geq 0.675\right\}$.

6. 已知 $X \sim t(n)$, 求证 $X^2 \sim F(1, n)$.

四、应用题

1. 以下是某工厂通过抽样调查得到的 10 名工人一周内生产的产品数

149	156	160	138	149	153	153	169	156	156
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

试由这批数据构造经验分布函数并作图.

2. 假若某地区 30 名 2000 年某专业毕业生实习期满后的月薪数据如下

909	1086	1120	999	1320	1091	1071	738	808	1224
1081	1130	1336	967	1572	825	914	866	1044	871

992	1232	950	775	1203	1025	1096	967	1164	971
-----	------	-----	-----	------	------	------	-----	------	-----

试求出这批数据的均值、方差，画出密度直方图，简述其分布特征。

(B)

1. 设 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自正态总体 X 的样本， $Y_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 X_i$ ， $Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$ ， $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2$ ， $T = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$ ，证明统计量 T 服从 $t(2)$ 分布。
2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 X 的样本，对任意的常数 a, c ，记 $Y_i = \frac{X_i - a}{c}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。 $\bar{X}, \bar{Y}, S_x^2, S_y^2$ 分别为对应的样本均值和样本方差。证明 $\bar{X} = c\bar{Y} + a$ ； $S_x^2 = c^2 S_y^2$ 。
3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 分别为来自 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，它们相互独立，对任意不为 0 的常数 a, c ，证明

$$t = \frac{a(\bar{X} - \mu_1) + c(\bar{Y} - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{a^2}{n_1} + \frac{c^2}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中 $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ 分别为两个样本的样本均值和样本方差， $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ 。

4. 已知离散均匀总体 X ， $P\{X = i\} = 1/3, i = 2, 4, 6$ 。抽取 $n = 54$ 的简单随机样本，求其和介于区间 $(4.1, 4.4)$ 内的概率（利用中心极限定理近似）。

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 是独立同分布的随机变量，且均服从 $N(0, 1)$ ，记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，

记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$ 。

- (1) 求 Y_i 的方差 $D(Y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ；
- (2) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n)$ 。
- (3) $P\{Y_1 + Y_n \leq 0\}$ 。