

# 第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

## 第 1 节 矩阵的初等变换

|                   |                                                                                                                                                                                                  |          |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 教 学<br>主 要<br>内 容 | 1. 矩阵初等变换的定义，以及如何对一个矩阵做初等变换；<br>2. 矩阵的等价标准形；<br>3. 用初等变换法，求矩阵的逆矩阵。                                                                                                                               |          |
| 教 学<br>目 标        | <b>【知识目标】</b> ：①掌握矩阵的初等变换；②会求矩阵的等价标准形。<br><b>【能力目标】</b> ：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。<br><b>【情感目标】</b> ：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。 |          |
| 教材<br>分析          | 重 点                                                                                                                                                                                              | 矩阵的初等变换  |
|                   | 难 点                                                                                                                                                                                              | 矩阵的等价标准形 |
| 教学方法与手段           | 探究式教学法+黑板粉笔                                                                                                                                                                                      |          |
| 学 习<br>方 法        | 学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结。                                                                                                                                                          |          |
| 教 学<br>学 时 数      | 2 学时，90 分钟。                                                                                                                                                                                      |          |

### (一)复习引入

1. 想一想： 观察下面这个线性方程组的求解过程

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

线性方程组还可以表示成矩阵形式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，对于线性方程组的求解可以用下面的矩阵展示，请同学们回答，下面对矩阵所做的处理。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 思考： 在这个求解过程中，对矩阵做过那些变换？

分析： 以非零的数  $k$  乘矩阵的某一行；

把矩阵的某一行的  $l$  倍加于另一行上；

交换矩阵的两行。

上述变换是可逆的，变换前的方程组和变换后的方程组是同解方程组，故这三种变换是同解变换。

计算行列式时，可以利用行列式的性质将行列式化为上三角形式，从而简化计算，那么，把行列式的某些性质应用到矩阵上，会给矩阵的运算带来很大的方便，这些性质反应到矩阵上就是矩阵的初等变换。

#### 定义 1 (矩阵的初等变换)

对矩阵施以的下列 3 种变换，称为矩阵的初等变换。

(1) 交换矩阵的两行(列);  $r_i \leftrightarrow r_j$

(2) 以一个非零数  $k$  乘矩阵的某一行(列);  $kr_i$

(3) 把矩阵的某一行(列)的  $k$  倍加于另一行(列)上.  $r_j + kr_i$

初等变换包含初等行变换和初等列变换。

定义 2 若矩阵  $A$  经过有限次初等变换变成矩阵  $B$ ，则称矩阵  $A$  与  $B$  等价，记为

$$A \rightarrow B \text{ 或 } A \sim B$$

矩阵之间的等价关系的基本性质：自反性，对称性，传递性

**探究：**矩阵经过若干次初等变换后，可以化成什么形式的矩阵？什么样的矩阵比较简单？

(1) 引入中的例子（备注：不要一次就计算到行标准形，在黑板上留下空余地方为行最简行和标准形）

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在以上的变换中，我们碰到过那些有代表性的矩阵？（不同的步骤提到了行阶梯形矩阵，**行最简形矩阵**，**标准形矩阵**）

$$\text{行阶梯形矩阵: } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.可画出一条阶梯线，线的下方全为零；2.每个台阶只有一行；3.阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素。

$$\text{行最简形矩阵: } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

非零行的第一个非零元为1； 这些非零元所在的列的其他元素都为零。

$$\text{标准形矩阵: } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左上角是一个单位矩阵，其它元素全为零。

行阶梯形矩阵，行最简形矩阵，标准形矩阵这三类矩阵之间的联系和区别是什么？

上面的这些特殊的矩阵中，最终最简洁的、最简单的矩阵具有什么模式？**标准形矩阵**

**定理 1** 任意一个矩阵  $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$  经过若干次初等变换，可以化为下面形式的矩阵  $D$ 。

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad r \text{ 行。}$$

$D$  称为矩阵的等价标准形。

请同学自己归纳，求矩阵的等价标准型的步骤。

## 初等矩阵

**定义 2** (初等矩阵)

对单位矩阵  $E$  施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

(1) 交换矩阵的两行(列);

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 以一个非零数  $k$  乘矩阵的某一行(列);

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E(2(k)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 把矩阵的某一行(列)的  $l$  倍加于另一行(列)上.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E(32(l)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上还要注意符号表示

注：初等矩阵都是可逆的，且它们的逆矩阵仍是同一类型的初等矩阵。

初等变换部分的第一次课在这里上完。

初等变换部分的第二次课从这里开始。

复习旧知：

请同学们回答如下问题：1.矩阵初等变换的定义；2.阶梯形矩阵、最简阶梯形矩阵、标准形矩阵，初等矩阵。

今天这节课具体学习 **1.初等矩阵与初等变换的关系；2.求逆矩阵的初等变换法**

下面我们探讨**初等矩阵和初等变换**之间有什么关系？

请仔细观察下面的问题：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 交换第一行与第二行, 有 } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 交换第一行与第二行, 有 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 给 } A \text{ 的第二行乘以 } -3 \text{ 加到第一行, 有 } \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 给 } E \text{ 的第二行乘以 } -3 \text{ 加到第一行, 有 } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**归纳：**对  $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$  的行施以一次某种初等变换得到的矩阵，等于用同种的  $m$  阶初等矩阵左乘  $A$ 。

**猜想：**要是  $A$  的列施以一次某种初等变换得到的矩阵，会等于什么？

将  $A$  的第三列乘 2 加于第一列，有  $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ；

将  $E$  的第三列乘 2 加于第一列，有  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}；$$

**归纳：**对  $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$  的列施以一次某种初等变换得到的矩阵，等于用同种的  $m$  阶初等矩阵右乘  $A$ 。

### 求逆矩阵的初等变换法

**引例** 求下列矩阵的阶梯形矩阵、最简阶梯形矩阵、标准形矩阵（分组完成）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

请同学们看着你的过程和结果，回答我的问题。

1. 矩阵  $A$  的等价标准形是什么？矩阵  $A$  可逆吗？

若矩阵可逆，矩阵  $A$  的等价标准形是单位矩阵。

2. 矩阵  $B$  的等价标准形是什么？矩阵  $B$  可逆吗？

矩阵不可逆等价标准形不是单位矩阵。

3. 将可逆矩阵  $A$  化为标准形时，仅仅使用了初等行变换。

下面，借助该引例，从两方面说明可逆矩阵与初等矩阵的关系。

一方面，对  $A$  施以若干次初等变换化为矩阵  $F$ （标准形矩阵），而对  $A$  施以

初等变换等于用相应的初等矩阵乘  $A$ ，即  $P_1 P_2 \cdots P_s A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = F$ ，假设  $A$  可逆，又因为初等矩阵可逆，则其乘积也可逆，所以  $F$  可逆，则  $|F| \neq 0$ ，于是  $F$  不能有任一行（列）的元素全为零，因此  $F$  必等于  $n$  阶的单位矩阵  $E_n$ 。

另一方面，若  $A$  可逆，则  $P_1 P_2 \cdots P_s A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = F$ ，那么  $A = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1} E Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1} = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ ，即可逆矩阵  $A$  可以表示成一些初等矩阵的乘积。

该问题还可以怎么说？由以上 3 我们知道：将可逆矩阵  $A$  化为标准形时，仅仅使用了初等行变换，即  $P_1 P_2 \cdots P_s A = E$ ，而又因为初等矩阵的乘积是可逆矩阵，所以以上还可以写成  $PA = E$ 。

**定理 2**  $n$  阶矩阵  $A$  为可逆矩阵的充分必要条件是它可以表示为一些初等矩阵的乘积。

探究如何求可逆矩阵  $A$  的逆矩阵？

如果  $A$  可逆，则  $A^{-1}$  也可逆，则存在初等矩阵  $G_1, G_2, \dots, G_k$ ，使

$$A^{-1} = G_1 G_2 \cdots G_k, \text{ 那么有 } AA^{-1} = G_1 G_2 \cdots G_k A,$$

$$\text{即 } E = G_1 G_2 \cdots G_k A$$

$$A^{-1} = G_1 G_2 \cdots G_k E。$$

上式分别表示对  $A$  施以若干次初等行变换化为  $E$ ，对  $E$  施以同样的初等变换化为  $A^{-1}$ 。

### 初等变换的应用

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

例 3 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$  的行最简形矩阵为  $F$ ，求  $F$ ，并求一个可逆矩阵

$P$ ，使  $PA = F$

用初等变换法求解矩阵方程

如果矩阵  $A$  可逆，则矩阵方程  $AX = B$  的解为  $X = A^{-1}B$

用初等矩阵与初等变换的关系理解

$$P(A, B) = (PA, PB) = (E, PB) = (E, A^{-1}B)$$

对  $(A, B)$  实施初等行变换，当  $A$  变为  $E$ ， $B$  就变成了  $A^{-1}B$ ，即方程组的解。

例 4 求矩阵方程  $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{答案: } X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{结果是 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例 5 求矩阵方程  $XA = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{答案 } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

举一反三，请大家继续回答下面的问题。

$$\text{例 6 求矩阵方程 } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{例 7 已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ 与同阶矩阵 } X \text{ 满足 } X - A = AX, \text{ 求 } X.$$

解线性方程组的新方法

$$\text{例 8 求解线性方程组 } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$



|                            |                                                                                                                                                                  |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>教<br/>学<br/>过<br/>程</p> | <p>(三) 课堂小结</p> <p>掌握矩阵的初等变换，会求矩阵的等价标准形；</p> <p>掌握求逆矩阵的方法，并会熟练的求一个矩阵的逆矩阵。</p> <p>会应用矩阵的逆，求解矩阵方程。</p> <p>(四) 思考题：</p> <p>判断矩阵是否可逆的方法都有那些，求逆矩阵的方法都有哪些？各有什么优缺点？</p> |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

# 第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

## 第 2 节 矩阵的秩

|         |                                                                                                                                                                                                                           |            |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 教学主要内容  | 1. 矩阵的 $k$ 阶子式;<br>2. 矩阵秩的定义及其求法;                                                                                                                                                                                         |            |
| 教学目标    | <p>【知识目标】: ①理解并掌握矩阵的 <math>k</math> 阶子式; ②掌握矩阵秩的计算, 并学会灵活应用。</p> <p>【能力目标】: ①通过在教师引导下探索新知的过程, 培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力; ②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。</p> <p>【情感目标】: 通过探索、归纳、总结的过程, 激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情, 培养学生积极探索的科学态度, 探索事物本质属性的欲望。</p> |            |
| 教材分析    | 重点                                                                                                                                                                                                                        | 矩阵秩的定义及其求法 |
|         | 难点                                                                                                                                                                                                                        | 矩阵秩的定义     |
| 教学方法与手段 | 探究式教学法, 黑板+粉笔                                                                                                                                                                                                             |            |
| 学习方法    | 学生可利用教师精心准备的例题, 通过教师的引导, 不断观察、分析、探索、归纳总结.                                                                                                                                                                                 |            |
| 教学学时数   | 2 学时, 90 分钟。                                                                                                                                                                                                              |            |

矩阵秩的概念是由英国数学家西尔维斯特在 1851 年给出的，距今已一百多年了。西尔维斯特（James Joseph Sylvester，公元 1814 年 9 月 3 日—公元 1897 年 3 月 15 日）是英国数学家。

贡献主要在代数学方面。他同凯莱一起，发展了行列式理论，创立了代数型的理论，共同奠定了关于代数不变量的理论基础。他创造了许多数学名词，当代数学中常用的术语，如不变式、判别式、雅可比行列式等都是他引入的。他一生发表了几百篇论文，著有《椭圆函数专论》一书。

### (一)复习引入

1. 想一想：在矩阵的初等变换中，我们知道任何一个矩阵都有行阶梯形和等价标准型。

例如  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

任何一个  $m \times n$  矩阵  $A$  都有唯一的一个标准形，也就是说标准型中 1 的个数是规定的，这个 1 的个数就是非零首元的个数，也就是非零行的个数。

在这样一个变换的过程中，什么量是不变的，就像当下流行的说法，不论我们的人生怎么变化，怎么折腾，我们那颗初心是不能变的。

2. 思考：以上的问题说明了矩阵的什么本质？为了研究这个问题，下面，首先给出一个定义。

### (二)讲授新知

**定义 1** 设  $A = (a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵，从  $A$  中任取  $k$  行  $k$  列 ( $k \leq \min(m, n)$ )，位于这些行和列相交处的元素，保持他们原来的相应位置所构成的  $k$  阶行列式，称为矩阵  $A$  的一

个  $k$  阶子式。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}, A \text{ 的一阶子式, 二阶子式, 三阶子式有几个? 为多少?}$$

$$\text{矩阵 } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 的一阶子式为有 20 个, 二阶子式有几个? 为多少? 三}$$

阶子式有几个? 为多少? 四阶子式有几个? 为多少?

$$\text{对于矩阵 } B \text{ 发现四阶子式为零, 一阶子式有不为零的, } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

四阶子式都为零。

$$m \times n \text{ 矩阵的 } k \text{ 阶子式有 } C_m^k C_n^k \text{ 个。 } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

如果一个矩阵的二阶子式都为零, 那三阶子式如果有的话, 会为零吗?

$$\text{矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\text{矩阵 } A \text{ 的一个 3 阶子式 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

如果矩阵  $A$  中所有 2 阶子式都等于零, 那么这个 3 阶子式也等于零。

根据行列式按行 (列) 展开法则可知, 矩阵  $A$  中任何一个  $r+2$  阶子式都可以用  $r+1$  阶子式表示。

如果矩阵  $A$  中所有  $r+1$  阶子式都等于零, 那么所有  $r+2$  阶子式也都为零。

所有高于  $r+1$  阶的子式也都为零。

鉴于以上分析, 我们发现, 矩阵  $A$  的三阶子式全为零, 二阶子式有不为零的, 就是说非零子式的最高阶数是 2;

矩阵  $B$  的四阶子式全为零, 三阶子式有不为零的, 就是说非零子式的最高阶数是 3。

鉴于这个非零子式的最高阶数是矩阵一个非常重要的特性, 我们给它起一个较为

简单，好叫的名字矩阵  $A$  的秩。下面给出矩阵的秩的严格定义。

**定义 2** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵。如果  $A$  中不为零的子式最高阶数为  $r$ ，即存在  $r$  阶子式不为零，而任何  $r+1$  阶子式皆为零，则称  $r$  为矩阵  $A$  的秩，记作  $R(A) = r$ 。

由此定义我们知道，上例中  $R(A) = 2$ ， $R(A) = 3$ 。

当  $A = O$  时，规定  $R(A) = 0$ 。  $0 \leq r \leq \min(m, n)$

对于  $n$  阶矩阵  $A$ ， $|A| \neq 0$ ， $R(A) = n$ ； $|A| = 0$ ， $R(A) < n$ ，即可逆矩阵的秩等于矩阵的阶数，不可逆矩阵的秩小于矩阵的阶数。

(1) 当  $A$  为  $n$  阶矩阵，且  $R(A) = n$  时，称矩阵  $A$  为满秩矩阵。

(2) 不同的矩阵可能具有相同的秩。

求矩阵  $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  的秩

求矩阵  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$  的秩。

碰到的困难，当矩阵的行数、列数较大时，用定义求矩阵的秩很不方便，即寻找最高阶非零的  $r$  阶子式不容易。那我们就要找简便的方法了，请大家想想，我们前面刚刚学了比较好的方法是矩阵的初等变换法。

回到开始的例子

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \rightarrow (\text{初等变换}) \rightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等变换不改变矩阵非零子式的最高阶数

标准形由  $A$  唯一确定

不变量

初等变换不改变矩阵非零子式的最高阶数

在矩阵的初等行变换过程中，矩阵的标准型是唯一的。

我们知道矩阵  $A$  的秩为 2,  $A$  的阶梯型中非零行的行数为 2, 等价标准型中 1 的个数为 2。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵  $C$  的秩为 3,  $B$  的阶梯型中非零行的行数为 3, 等价标准型 1 的个数为 3。

鉴于上面的问题, 是否可以对矩阵  $A$  作一系列初等行变换, 将  $A$  化为阶梯形矩阵, 阶梯形矩阵中非零行的行数  $r$  即是矩阵  $A$  的秩  $R(A)$ 。

这个回答是肯定的, 我们有定理作保证。

**定理 1** 矩阵经初等变换后, 其秩不变。

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**推论:** 若可逆矩阵  $P, Q$  使  $PAQ = B$ , 则  $R(A) = R(B)$ 。

**求矩阵的秩和最高阶非零子式的方法:**

1. 求矩阵的秩, 只要用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵, 行阶梯形矩阵中非零行的行数就是该矩阵的秩。

2. 求  $A$  的最高阶非零子式, 选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列对应的  $A$  的行和列。

请计算上面矩阵的秩

例 1 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$  的秩。

例 2 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , 求  $(A, b)$  的秩。

例 3 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$  的秩  $R(A) = 2$ , 求  $\lambda$ 。

例 4 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , 问  $a$  为何值时,  $R(A) = 2$ ;  $a$  为何值时,  $R(A) = 3$ 。

例 5 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ 3 & 1 & b & -1 \end{pmatrix}$ ,  $R(A) = 2$ , 求  $a, b$  的值。

例 6 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$ , 已知  $R(A) = 2$ , 求  $\lambda, \mu$  的值。

### (三) 课堂小结

矩阵的秩是矩阵非常重要的特征, 需要掌握一些

1. 矩阵的  $k$  阶子式的定义;
2. 矩阵秩的定义
3. 矩阵秩的求解方法

(a) 概念法, 低阶矩阵

(b) 初等变换法, 将矩阵化为行阶梯阵, 行阶梯阵的非零行数就是矩阵的秩。

### (四) 思考题:

我们已经学习了矩阵的秩及其求法, 请思考并总结它的作用?

# 第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

## 第 3 节 线性方程组的解

|         |                                                                                                                                                                                                                        |             |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 教学主要内容  | 线性方程组的解。                                                                                                                                                                                                               |             |
| 教学目标    | <p>【知识目标】：①掌握线性方程组的消元解法并学会灵活应用；②掌握线性方程组有解的条件，及什么情况有唯一解，什么情况有无穷解。</p> <p>【能力目标】：①通过在教师引导下探索新知的过程，培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力；②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。</p> <p>【情感目标】：通过探索、归纳、总结的过程，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情，培养学生积极探索的科学态度，探索事物本质属性的欲望。</p> |             |
| 教材分析    | 重点                                                                                                                                                                                                                     | 线性方程组的消元解法。 |
|         | 难点                                                                                                                                                                                                                     | 线性方程组解的情形。  |
| 教学方法与手段 | 探究式教学法+黑板粉笔。                                                                                                                                                                                                           |             |
| 学习方法    | 学生可利用教师精心准备的例题，通过教师的引导，不断观察、分析、探索、归纳总结。                                                                                                                                                                                |             |
| 教学学时数   | 2 学时，90 分钟。                                                                                                                                                                                                            |             |



本节内容划分为两个问题：1. 探讨  $n$  个未知数  $m$  个方程的线性方程组的解法；2. 从理论上探讨线性方程组解的情况，何时有解，何时无解。若有解，则有多少组解；若有无穷多解，如何表示。

### (一)复习引入

1. 想一想：

黑板的左边写这些内容：

线性方程组：  $n$  个未知数，  $m$  个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{矩阵形式为 } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A$  称为方程组的系数矩阵， $\mathbf{b}$  称为方程组的常数项矩阵， $\mathbf{x}$  称为  $n$  元未知量矩阵。

线性方程组的增广矩阵

$$(A|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

线性方程组与增广矩阵是一一对应的。

请用初等行变换的方法求解下列线性方程组，并说明解的情况、系数矩阵的秩、增广矩阵的秩。

例 1 求解线性方程组 
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 \end{cases}$$

解：  $B = (A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

方程组的解

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$$

$$\text{写成向量形式} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上引例说明：该线性方程组有唯一的解，并且系数矩阵和增广矩阵的秩一样都是 3，这个秩和未知数的个数相同（ $R(A, b) = R(A) = n$ ）。

反之系数矩阵和增广矩阵的秩一样都是 3，则线性方程组有唯一解。

从该例我们发现，当把增广矩阵化为阶梯形矩阵时，就可以知道它的秩，就可以知道是否有唯一解，然后再进行回代，化为简化的阶梯形，就知道解是多少。

这个问题进一步说明了：

**猜想：**线性方程组有唯一解的充分必要条件是  $R(A, b) = R(A) = n$

**思考：**线性方程组有多解时，系数矩阵和增广矩阵的秩会有什么关系，与未知数的个数有什么关系？或者说当系数矩阵和增广矩阵的秩有什么关系，并且与未知数的个数有什么关系时，线性方程组有多解？

下面带着这些问题，我们来看例 2

$$\text{例 2 求解线性方程组} \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

**解：**对增广矩阵施以初等行变换，化为阶梯形矩阵，简化的阶梯形矩阵

$$\begin{aligned} (A:b) &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}, \text{ 令 } x_3 = c_1, x_4 = c_2, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}c_1 - \frac{13}{7}c_2 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}c_1 + \frac{4}{7}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

写成向量形式是给  $c_1, c_2$  取两组值  $(1,0), (0,1)$ , 可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

请同学们观察解的情况, 和它们秩的情况, 并回答。

我们发现当  $x_3, x_4$  取不同的值时, 就会得到不同的解, 即该方程组有多解;

系数矩阵和增广矩阵的秩都为 2, 即它们有相同的秩, 但是这个秩小于未知数的个数。

**归纳猜想:** 当  $R(A, b) = R(A) < n$  时, 方程有无穷多解。当方程有无穷多解时,  $R(A, b) = R(A) < n$ 。

由例 1 和例 2 我们发现, **线性方程组有解的猜想定理。**

**定理 1** 线性方程组有解的充分必要条件是:  $R(A, b) = R(A)$ , 且当  $R(A, b) = n$  时方程组有唯一解; 当  $R(A, b) < n$  时方程组有无穷多解。

前面的归纳猜想说了, 当  $R(A, b) = R(A)$  时, 方程组有解, 那么当  $R(A, b) \neq R(A)$  时, 线性方程组的解会是什么情况?

请同学们看下面的例 3

**例 3** 解线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$

$$B = (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

发现  $0=2$  出现了矛盾, 说明线性方程组无解。我们也可以看到, 系数矩阵的秩为 3, 增广矩阵的秩为 4, 它们不等。所以得到的结论是当  $R(A, b) \neq R(A)$  时, 方程组无解, 或方程组无解时,  $R(A, b) \neq R(A)$ , 也即

**线性方程组无解的充分必要条件是  $R(A, b) \neq R(A)$ 。**

下面我们对例 1, 例 2, 例 3 所发现本质的问题放到普通的情况说明, 它们也是成立的。

请同学们把课本翻到 72 页, 定理 3。

**例 4**  $t$  为何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = t \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = t + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2t + 3 \end{cases}$$
 有解? 并求解。

**齐次线性方程组解的情况**

$n$  个方程  $n$  个未知数的**齐次线性方程组** (线性方程组的常数项全为零) **解的情况**, 若是系数行列式  $|A| \neq 0$ , 仅有零解(唯一解), 若是  $|A| = 0$ , 有非零解。

以上解的情况, 用今天学的内容解释就是: 当秩是  $n$  时, 有唯一解, 且为零解 (唯一解)。当秩小于  $n$  时, 有无穷多解。

下面我们探讨  $m$  个方程  $n$  个未知数齐次线性方程组解的情况

把定理 3 特殊化到齐次线性方程组, 我们有

当  $R(A) = n$  时, 方程只有零解

有非零解的充分必要条件是  $R(A) < n$ , 即

齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是  $R(A) < n$

这个结论与上面的是一样的。

请思考这样的问题，当  $m \geq n$  时，有可能有零解，也有可能非零解。

那当  $m < n$  会是什么情况那？

当  $m < n$  时，因为  $R(A) \leq \min(m, n) = m < n$ ，所以由以上定理知，齐次线性方程组有非零解。

推论：齐次线性方程组中当  $m < n$  时，有非零解。

针对上面的问题，我们做例 5

**例 5** 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

综合练习题

**例 6** 设有线性方程组 
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问  $\lambda$  取何值时，此方程组有惟一解，无解，无穷多解，并在有无限多解时求其通解。

了解、记住的定理

**定理 6** 矩阵方程  $AX = B$  有解的充分必要条件是  $R(A) = R(A, B)$ 。

**定理 7** 设  $AB = C$ ，则  $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$ 。

### (三) 课堂小结

1. 线性方程组的消元解法；
2. 线性方程组解的情形。

### (四) 思考题：

请同学们归纳总结用消元法求解线性方程组的一般步骤。