

《线性代数》模拟试卷（十三）

班级_____姓名_____学号_____得分_____

一、判断题（正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

- () 1. 任何两个矩阵都可以相加.
- () 2. 若矩阵 A, B, C 满足 $BA = CA$ ，而且 $A \neq O$ ，则 $B = C$.
- () 3. 设 A 为 n 阶方阵， b 为 n 维列向量，若行列式 $|A| \neq 0$ ，则线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解.
- () 4. 设 $\alpha = (1, 1)$ ， $\beta = (-2, 3)$ ，则 $\alpha\beta^T = 1$.
- () 5. 集合 $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in R \right\}$ 不是一个向量空间.

二、填空题（每小空3分，共15分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$ _____.
2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & -21 \end{pmatrix}$ 的等价标准形矩阵为_____.
3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ， E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$ ，则 $|B| =$ _____.
4. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ，向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a =$ _____.
5. 与向量 $\alpha_1 = (1, -1, -1)^T$ ， $\alpha_2 = (1, 2, -1)^T$ 正交的非零向量为_____.

三、单项选择题（每小题3分，共24分）

1. 下列选项中不属于五阶行列式 $|a_{ij}|$ ($i, j=1, 2, \dots, 5$) 中的一项是 ().

- A. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$ B. $-a_{51}a_{12}a_{43}a_{34}a_{25}$ C. $-a_{13}a_{52}a_{34}a_{21}a_{45}$ D. $a_{55}a_{44}a_{33}a_{22}a_{11}$

2. 设线性方程组的增广矩阵为 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 若线性方程组无解, 则 λ 为 ().

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

3. 设 A, B 均为4阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, $|B| = -2$, 则 $|2A^*B^{-1}| = ()$.

- A. 1 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为 ().

- A. 3 B. 1 C. 0 D. 2

5. 设 $\alpha_1 = (1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1)^T$, $\alpha_4 = (0, 0)^T$, 则下列不是该向量组的极大线性无关组的是 ().

- A. α_1, α_3 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. α_2, α_3

6. 设 $\alpha = (1, 2, 3)^T$, 则 α 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (1, 1, 0)^T, e_3 = (1, 1, 1)^T$ 下的坐标是 ().

- A. $(1, 2, 3)^T$ B. $(1, 1, -3)^T$ C. $(-1, -1, 3)^T$ D. $(1, 1, 1)^T$

7. 假设 A, B 都是可逆矩阵, 则矩阵方程 $AXB = C$ 的解为 ().

- A. $X = A^{-1}CB^{-1}$ B. $X = CA^{-1}B^{-1}$ C. $X = CB^{-1}A^{-1}$ D. $X = B^{-1}A^{-1}C$

8. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Q 为2阶正交矩阵, 且 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $Q = ()$.

A. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

四、计算题（共 6 小题，共 51 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 的值. (7 分)

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A 是否可逆若可逆求其逆矩阵. (7 分)

4. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, η_1, η_2, η_3 是

$Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解. (10 分)

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

6. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基分别为 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 和 $\beta_1 = (1, 2, 1)^T$, $\beta_2 = (2, 3, 4)^T$, $\beta_3 = (3, 4, 3)^T$, 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵. (10 分)