

《线性代数》模拟试卷（九）答案

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

- (×) 1. 任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性不变.
- (×) 2. 矩阵的乘法满足交换律.
- (√) 3. 如果 $r(A) < n$ ，当且仅当 $Ax = 0$ 有非零解.
- (√) 4. 初等变换不改变矩阵的秩.
- (√) 5. 集合 $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in R \right\}$ 是一个向量空间.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ _____.
2. 矩阵 $\begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ 3 & x-1 \end{pmatrix}$ 可逆，则 x 必满足_____ $x \neq 4$ 且 $x \neq -2$ _____.
3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 的标准形矩阵是_____ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ _____.
4. 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的单位化向量为_____ $\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ _____.

三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 若 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ，则 λ_1, λ_2 必须满足(C)

A. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$

B. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

C. $\lambda_1 = 2$, λ_2 可为任意数 D. λ_1, λ_2 均可任意数

2. 设 A 是 4 阶矩阵, $|A| = -3$, 则 $\|A\|A| =$ (B)

A. 9 B. 3^5 C. 27 D. -3^5

3. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 下列关系一定成立的是 (D)

A. $(AB)^2 = A^2B^2$ B. $(AB)^T = A^TB^T$ C. $|A+B| = |A|+|B|$ D. $|AB| = |BA|$

4. 当 a 取何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a \end{cases}$$
 有解 (A)

A. 5 B. 0 C. 1 D. 2

5. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $|A| \neq 0$, 则有 (B)

A. A 的列向量线性相关 B. A 的行秩为 0
C. A 的列向量线性无关 D. A 的行向量线性相关

6. 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, 若 $PA = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, 则 $P =$ (D)

A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)^T$ 向量 $\beta = (0, 3, 1)^T$ 可表示为

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合: $\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, 则 a, b, c 应满足条件 (B)

A. 1, -2, 3 B. 1, 2, -3 C. -1, -2, -3 D. 1, 2, 3

8. 设向量组 $\alpha_1 = (0, 1, -2, 3)^T$, $\alpha_2 = (3, -2, 4, 3)^T$, $\alpha_3 = (2, 0, 6, 3)^T$, $\alpha_4 = (-1, 2, -6, 4)^T$,

下列不是该向量组的极大线性无关组的是 (D)

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. α_2, α_3

四、计算题（共 50 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值. (6 分)

解: 原式 $= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (2 分)

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
 (5 分)

$$= 48$$
 (6 分)

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, 求 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44}$ 的值. (7 分)

解: $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (4 分)

$$= 0$$
 (7 分)

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 与同阶矩阵 X 满足 $X - A = AX$, 求 X . (8 分)

解: 所给方程可以变形为 $X = (E - A)^{-1}A$ (1 分)

$$(E-A \quad A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 7/2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -7/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

$$X=\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ -3 & -7/4 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8 \text{ 分})$$

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩 $r(A)$. (5 分)

解: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

则 $r(A) = 2$ (5 分)

5. 用基础解系表示如下线性方程组的全部解 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$. (14 分)

解: 构造增广矩阵 $(Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (1 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

由 $r(A) = r(Ab) = 3 < 4$, 知方程组有无穷多解, 且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -8 - x_3 \\ x_2 = 13 + x_3 \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

令 $x_3 = 1$, 知等价方程组对应的齐次方程组中求得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$

求特解：令 $x_3 = 0$ ，得

$$\eta = \begin{pmatrix} -18 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (12 \text{ 分})$$

故所求通解为

$$x = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } c \text{ 为任意的常数.} \quad (14 \text{ 分})$$

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda + 5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 4)(\lambda + 5) + 18] = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2), \quad (2 \text{ 分})$$

所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. (3 分)

$$\text{当 } \lambda = -2 \text{ 时, 由 } (\lambda I - A)X = 0 \text{ 得 } \begin{cases} -6x_1 - 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}. \quad (4 \text{ 分})$$

令该方程组中 $x_3 = 1$ 得该方程组的一个基础解系 $\xi_1 = (-1, 1, 1)$, 所以矩阵 A 的对应于特征值 -2 的特征向量为 $k_1 \xi_1$, 其中 k_1 为任意非零常数. (6 分)

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时, 由 } (\lambda I - A)X = 0 \text{ 得 } \begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{即 } x_1 = -2x_2. \quad (7 \text{ 分})$$

令该方程组中 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得该方程组的一个基础解系

$\xi_2 = (-2, 1, 0)^T$, $\xi_3 = (0, 0, 1)^T$, 所以矩阵 A 的对应于特征值 1 的特征向量为

$k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, 其中 k_2, k_3 为任意非零常数.

(10 分)