



行列式按行（列）展开

李艳艳

数学与工程学院



一、引例

2

例 设

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{matrix}} \\ \hline \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}} \end{vmatrix} = D_1 D_2$$

“降阶” 简化运算

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$



思考：有没有对行列式进行“降阶”的一般方法？从而简化计算？



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{a_{11}a_{22}a_{33}}{\quad} + \frac{a_{12}a_{23}a_{31}}{\quad} + \frac{a_{13}a_{21}a_{32}}{\quad} - \frac{a_{11}a_{23}a_{32}}{\quad} - \frac{a_{12}a_{21}a_{33}}{\quad} - \frac{a_{13}a_{22}a_{31}}{\quad}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

二、余子式与代数余子式

5

在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 行划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} 。

记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。



例如

6

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$



回到开始的问题

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

三、行列式按行（列）展开

8

定理

行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

三、行列式按行（列）展开

9

科普小知识



克莱默(Cramer, Gabriel, 1704-1752)瑞士数学家。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重。

主要著作是《代数曲线的分析引论》(1750)，对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述。

三、行列式按行（列）展开

10

例1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

将 D 分别按第二行和第三列展开.

解：按第二行展开：

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= \boxed{0}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \boxed{0}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \boxed{3}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

三、行列式按行（列）展开

11

例1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{第三列展开.}$$

按第三列展开:

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$= -1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 15$$

» 三、行列式按行（列）展开

12



思考： 有没有对行列式进行“**降阶**”的一般方法？
从而**简化计算**？

回答： 一般方法是：**行列式按行（列）展开**

尽量选择含**零元素较多**的行（列），可**简化计算**

三、行列式按行（列）展开

13

例2

计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

三、行列式按行（列）展开

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j.$$

三、行列式按行（列）展开

15

关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\text{其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

三、行列式按行（列）展开

16

例3 计算行列式

$D =$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

三、行列式按行（列）展开

17

$$= (-1)^{2+5} 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 + r_1 \end{matrix} - 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20(-42 - 12) = -1080.$$

三、行列式按行（列）展开

18

例4 讨论当 k 为何值时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$$

三、行列式按行（列）展开

19

例5 已知四阶行列式 D 中第三列元素依次为-1, 2, 0, 1它们的余子式依次分别为5, 3, -7, 4, 求 D

解： $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$

$$M_{13} = (-1)^{1+3} A_{13} = A_{13} \quad M_{23} = (-1)^{2+3} A_{23} = -A_{23}$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3} A_{33} = A_{33} \quad M_{43} = (-1)^{4+3} A_{43} = -A_{43}$$

$$D = (-1) \times A_{13} + 2 \times A_{23} + 0 \times A_{33} + 1 \times A_{43}$$

$$D = (-1) \times 5 + 2 \times (-3) + 0 \times (-7) + 1 \times (-4) = -15$$

三、行列式按行（列）展开

20

例6

求行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & a_8 \end{vmatrix}$$

中元素 a_7 的代数余子式

解：

$$A_{41} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_2 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ a_5 & a_6 & 0 \end{vmatrix} = (-1) a_2 (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

$$= a_2 a_4 a_5 - a_2 a_3 a_6$$

三、行列式按行（列）展开

21

例8

设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

求, $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 及 $M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41}$

三、行列式按行（列）展开

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

三、行列式按行（列）展开

23

$$A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

» 三、行列式按行（列）展开

24

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

三、行列式按行（列）展开

25

例9

设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41}$$

$$= A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

三、行列式按行（列）展开

26

$$A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 8 & -1 & 2 \\ -9 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 8 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

**例10**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 380, \text{ 求}$$

(1) $A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42}$

(2) $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$

(3) $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$

解:

$$(1) \quad A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42} = \frac{1}{2}(2A_{12} + 2A_{22} + 2A_{32} + 2A_{42})$$

$$= \frac{1}{2}(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42})$$

$$= \frac{1}{2}D = 190.$$

$$(2) \quad A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \frac{1}{2}(2A_{13} + 2A_{23} + 2A_{33} + 2A_{43})$$

$$= \frac{1}{2}(a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} + a_{42}A_{43}) = 0.$$



$$(3) \quad M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14} = A_{11} - A_{12} + A_{13} - A_{14}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ \hline r_4 - 4r_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \hline r_2 \leftrightarrow r_3 \end{array} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_3 - 2r_2 \\ \hline r_4 - 3r_2 \end{array} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -9 & 21 \end{vmatrix}$$

>>>

-

1	-1	1	-1			1	-1	1	-1		
0	2	2	-5		$r_4 - 9r_3$	0	2	2	-5		
0	0	-1	16			0	0	-1	16		
0	0	-9	21			0	0	0	-123		

30

$$= -246.$$

行列式按行（列）展开

课堂小结

行列式按行（列）展开

——用“降阶”简化计算行列式的方法

选择零元素较多的行（列）

——应用此技巧

行列式按行（列）展开

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$