

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级

专业

撰写时间

[illegible]

算》一书，是迄今被认为是最早的概率论著作。早期概率论真正创立者是：帕斯卡、费尔马和惠更斯，该时期被称为组合概率时期。

- 瑞士数学家雅可布·贝努利等在前人基础上，继续分析赌博中的其他问题，给出了“赌徒输光问题”和“圣彼得堡问题”的详尽解法，证明了被称为“大数定律”的一个定理，1713年，其著作《猜度术》出版。
- 随着18、19世纪工业革命和科学的发展，人们注意到某些生物、物理和社会现象与机会游戏相似，从而由机会游戏起源的概率论被应用到这些领域中，也大大推动了概率论本身发展：
- ✧ 18世纪，法国人布丰在《概率算术试验》中导入“投针问题”；
- ✧ 19世纪，概率论有了飞跃的进展：
- ✧ 1812年拉普拉斯出版的经典著作《分析的概率理论》总结了这一时代概率论的研究，提出了概率古典定义；
- ✧ 高斯则奠定了最小二乘法和误差论的基础；
- ✧ 泊松推广了“大数定律”，引入了十分重要的“泊松分布”；
- ✧ 切比雪夫和其的学生马尔可夫分别创建了“大数定律”和“马尔可夫链”。
- ✧ 1934年苏联数学家辛钦提出一种在时间中均匀进行着的平稳过程理论；
- ✧ 柯尔莫戈洛夫以勒贝格的测度论为基础，给出了一套完整的概率论公理体系。

PPT

如何把概率论建立在严谨的逻辑基础上，这是从概率诞生时起人们就关注的问题，许多数学家进行过尝试，经过了300年的发展才最终得以圆满解决！

（二）概率论的应用与发展：严谨实用的学科

概率论伴随着工程技术科学的发展而发展起来，经过18、19世纪的长期探索，逐步在20世纪初成为一门完整、严谨的学科。它在物理、化学、生物、生态、天文、地质、医学等专业，在控制论、信息论、电子技术、预报、运筹、金融经济等工程技术领域有广泛的应用。

最新的相关学科发展：博弈论、大数据发掘与分析、预测学。

科幻电影、小说：阿西莫夫《基地》系列—心理史学（预测未来发展）；

电影《少数派报告》---犯罪行为的短时预测。

（三）概率论与通信理论的发展

概率论对通信数学理论发展的最大贡献：基于概率论而创建的“信息论 (Information Theory)”，导致了数字通信的兴起与繁荣。信息论将数字通信理论进行重建：利用概率和统计分布等数学语言，构建通信系统中信源编码、信道调制、传输信道、信道信源解调等各个传输环节的分析描述模型，采用基于统计学原理的分析研究方法对整个通信系统进行构架和剖析，指导了诸如信源编码、纠错码、无线信道建模分析等多个分支学科的出现，间接导致当代各类宽带高速移动通信的出现。

板书讲解

概率论与数理统计是今后所有通信专业课程的数学理论基础，属于必修的公共基础课之一，大学期间共有两门课程：

第一阶段为《概率论与数理统计》；

第二阶段学习其后续课程《随机信号分析》。

重点

（四）本课程将要学习的内容

- **概率论** — 根据大量同类随机现象的统计规律，对随机现象出现某一结果的可能性做出客观的科学判断，对这种出现的可能性大小做出定性、定量的描述，能有效比较这些可能性的大小与相互联系。（对应第 1-4 章内容）
- **数理统计** — 应用概率论研究大量随机现象的规律性；对通过科学安排的一定数量的实验所得到的统计方法给出严格的理论证明；目标是使我们能从一组样本来判定是否能以相当大的概率来保证某一判断是正确的，并控制发生错误的概率。（对应第 5、6 章内容）
- **统计手段** — 以上提供的方法在各种具体问题中的应用，它不去注意这些方法的理论根据、数学论证。（对应第 7、8 章内容）

第二部分：随机实验的定义与特点（10 分钟）

最基本的数学模型：首个非常重要的概念，是**研究概率的重要的基础性工具**。

自然界和社会上发生的现象是多种多样的，在观察、分析、研究各种现象时，通常我们将它们分为两类：

(1) 可事前预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的，或者根据它过去的状况，在相同条件下完全可以预言将来的发展，称这一类现象为**确定性现象或必然现象**。

(2) 在个别试验中呈现不确定的结果，而在相同条件下大量重复试验中呈现规律性的现象称为**随机现象(或偶然现象)**。

长期观察和实践表明：随机现象在个别的试验中，¹**偶然性**起着支配作用，呈现出**不确定性**；²但在相同条件下的大量重复试验中，却呈现出某种**规律性**。随机现象的这种规律性称之为**统计规律性**，概率论与数理统计就是**研究和揭示随机现象的统计规律性**的一门学科。

随机试验 (Random Experiment) 包括各种各样的科学**试验**，甚至对某一事务的某一特征的**观察**，也认为是一种试验。

例子：E₁：抛一枚硬币，观察正面 H，反面 T 出现的情况

E₂：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H，反面 T 出现的情况

E₃：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数

E₄：抛一颗骰子，观察出现的点数

E₅：记录电话交换台一分钟内接到的呼叫次数

E₆：在一批灯泡中任意抽取一次，测试它的寿命

E₇：记录某地一昼夜地最高温度和最低温度

以上试验有以下**三个特点**：

- (1) 可以在相同条件下**重复地进行**；

提问，
关于自然现象统计规律的经验观察

PPT

(2) 每次试验地可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前, 不能确定哪一个结果会出现,

具备以上三个特点(简而言之: 过程的可重复性、可能结果的确定性、实际结果的不确定性)的试验, 称为**随机试验**

随机试验的作用: 通过随机试验来研究随机现象

板书

第三部分: 样本空间, 随机事件, 随机事件的关系与事件运算 (40 分钟)

(一) 样本空间

由随机试验的 3 个特点可知, 每次试验的所有可能结果是已知的。

样本空间: 将随机试验 E 的所有可能结果组成一个集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S (space)。

样本点: 样本空间中的元素, 即 E 的每个结果。

例: 设前述试验 $E_1 \sim E_7$ 的样本空间 $S_1 \sim S_7$ 如下: (保留)

$S_1: \{H, T\}$

$S_2: \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$S_3: \{0, 1, 2, 3\}$

$S_4: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_5: \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$S_6: \{t | t \geq 0\}$

$S_7: \{(x, y) | T_0 \leq x \leq y \leq T_1, T_0 \text{ 表示该地区最低温, } T_1 \text{ 表示最高温}\}$

※ **注意:** 确定样本空间时, 一定要弄清试验的目的! 试验的样本点与样本空间是根据试验目的而确定的, 由于试验目的不一样, 其样本空间也不尽相同!

PPT

(二) 随机事件

在随机试验中不是单纯的观察样本空间的所有元素了事, 常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合。

例如: 在试验 E_4 中, 掷骰子, 规定点数大于 3 的算赢

那么针对输赢这一概念, 满足赢的条件的样本点组成一个集合

$A = \{4, 5, 6\}$

A 是 S_4 的一个子集, 称 A 为 S_4 的一个随机事件

随机事件: 一般的, 称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件, 简称事件。

事件发生: 在每次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时, 称这一事件发生

几个特殊事件:

结合某些机会游戏如投骰子, 对该概念

设样本空间 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

1) **基本事件(Basic Event)**: 由一个样本点组成的单点集

随机试验的任一种可能结果构成一个基本事件, 比如 $A = \{s_5\}$

基本事件的总数: 等于集合 S 的基数

注意区别: 样本点和基本事件, 是元素和集合的关系

2) **必然事件(Certain Event)**: 样本空间 S 作为一个子集, $S \subseteq S$, 它作为事件时总会发生

3) **不可能事件(Impossible Event)**: 用空集 Φ 表示, 不包含任何样本点, 也有 $\Phi \subset S$, 每次试验都不发生

S 中不同事件的总数: 记 S 中基本事件的个数为 $|S|$, 则总数为 $2^{|S|}$

例 1: 随机试验 E_2 : 将一枚硬币抛掷三次, 观察其正面和反面出现的情况

$S_2 = \{\underline{HHH}, \underline{HHT}, \underline{HTH}, \underline{HTT}, \underline{THH}, \underline{THT}, \underline{TTH}, \underline{TTT}\}$

事件 A_1 : “第一次出现的是正面 H ” $A_1 = \{\underline{HHH}, \underline{HHT}, \underline{HTH}, \underline{HTT}\}$

A_2 : “三次出现同一面” $A_2 = \{\underline{HHH}, \underline{TTT}\}$

随机试验 E_6 : 事件 A_3 : “寿命小于 1000 小时”, $A_3 = \{t | 0 \leq t < 1000\}$

随机试验 E_7 : 事件 A_4 : “最高温与最低温相差 10 度”

$A_4 = \{(x, y) | T_0 \leq x \leq y \leq T_1, y - x = 10\}$

进行形象解释

PPT

(三) 事件间的关系与事件的运算

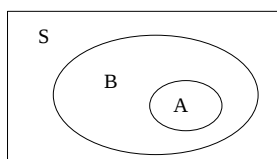
事件是一个集合, 因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理, 根据“事件发生”含义, 给出概率论中事件关系和运算的表述方法。

设: 试验 E 的样本空间为 S , $A, B, A_k (k=1, 2, \dots)$ 是 S 的子集

3.1 事件的关系

(1) 包含关系 (Inclusion Relation)

定义: 若属于 A 的样本点必属于 B , 则称事件 B 包含事件 A , 记为 $A \subset B$, 即事件 A 发生必然导致事件 B 发生。



注意:

1. 事件 A 是 B 的子事件即 $A \subset B$, 换一说法: 如果事件 B 不发生必导致事件 A 也不发生, 反之则不成立;

2. 必然事件在每一次试验中都发生, 对任何一个随机事件 A 都有 $\Phi \subset A \subset S$ 。

PPT

回顾集合论中集合之间的关系和集

(2) 相等关系(Equivalent Relation)

定义: 若属于 A 的样本点必属于 B, 且属于 B 的样本点必属于 A, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记为 $A = B$ 。即: 若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$, 则有 $A = B$ 。

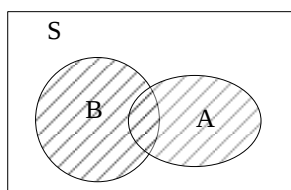
3.2 事件的运算 (Operation of Events)

(1) 事件的和/并(Union of Events)

定义: 由事件 A 与事件 B 中所有样本点 (相同的样本点只计入一次) 所组成的新事件称为事件 A 与 B 的和/并。

(1) 数学表述为: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;

(2) 当且仅当 A, B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生。



例. 抛一粒骰子, 事件 A = “出现点数不超过 3”, 事件 B = “出现偶数点”。

则 $A = \{1, 2, 3\}$, 事件 $B = \{2, 4, 6\}$ 。

所以, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 。

多个事件的和事件: $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件

当 $n \rightarrow \infty$ 时称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件

※ 事件间关系的描述方法

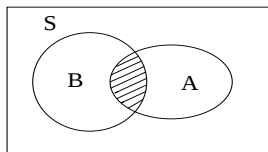
- 1) 元素考察法, 考察每一个元素对于各个事件的归属问题
- 2) 画韦恩图法

(2) 事件的积/交(Product of Events)

定义: 由事件 A 与事件 B 中公共的样本点组成的新事件称为事件 A 与 B 的积/交。

(1) 数学表述为: $A \cap B = AB = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;

(2) 当且仅当 A 与 B 同时发生时, $A \cap B$ 才发生。



例. 抛一粒骰子, 事件 A = “出现点数不超过 3”, 事件 B = “出现偶数点”,

则 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 所以, $A \cap B = \{2\}$ 。

多个事件的积事件: $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件。

合运算

强 调
“事件
发生”
的定义

PPT

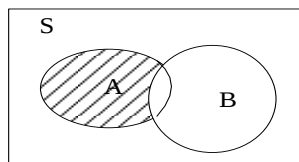
两类描
述方法
的特点

当 $n \rightarrow \infty$ 时称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件。

(3) 事件的差 (Difference of Events)

定义: 由事件 A 中而非 B 中的样本点所组成的新事件称为事件 A 对 B 的差。

- (1) 事件 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 称为 A 与 B 的差事件。
- (2) 当且仅当 A 发生, 而 B 不发生时, 事件 $A - B$ 才发生。

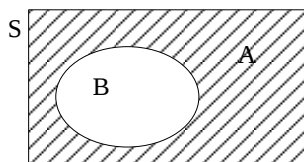


(4) 对立事件 (Opposite Events)

定义: 由在样本空间 S 中而不在事件 A 中的样本点组成的新事件, 称为事件 A 的对立事件。

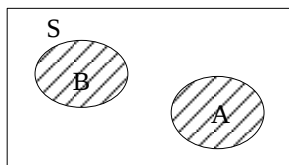
(1) 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$ 则 A 与 B 互为逆事件, 每次试验事件 A 和事件 B 有且仅有一个事件发生。

(2) A 的对立事件常记为 $\bar{A}$ ($= S - A$)。



(5) 互不相容/互斥 (Incompatible Events)

定义: 若事件 A 与事件 B 没有相同的样本点, 则称事件 A 与事件 B 互不相容/互斥, 即事件 A 与事件 B 不可能同时发生。即 A 与 B 互不相容 $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ 。



基本事件是两两互不相容的。事件 B 是事件 A 的对立事件 (或逆事件) 是指事件 A 与 B 互不相容, 并且它们中必有一事件发生, 即

$$A \cup B = S, A \cap B = \emptyset.$$

(6) 事件间的运算律

设 A, B, C 是三个事件, 则有

交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ 。

结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ 。

PPT

板书画
多累时
间关系
的图形
表述,
尤其一
些特例

重点讲
解基本

分配率: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

德·摩根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 。

德·摩根律可推广至: $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \bar{A}_k$, $\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \bar{A}_k$ 。

例 2: $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ 及

事件 $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$ 和事件 $A_2 = \{HHH, TTT\}$

则有:

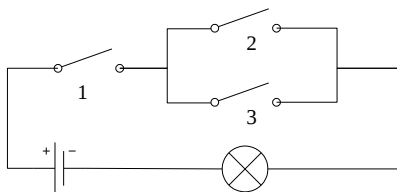
$$A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$$

$$A_1 \cap A_2 = \{HHH\}$$

$$A_2 - A_1 = \{TTT\}$$

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \{THH, THT, TTH\}$$

例 3:



事件 A: 灯亮

B: 开关 1 闭合

C: 开关 2 闭合

D: 开关 3 闭合

描述: 准确判断试验观察的目标, 即开关 1, 2, 3 的闭合情况

$$S = \{\bar{1}\bar{2}\bar{3}, \bar{1}\bar{2}3, \bar{1}2\bar{3}, \bar{1}23, 1\bar{2}\bar{3}, 1\bar{2}3, 12\bar{3}, 123\}$$

$$A = \{\bar{1}\bar{2}3, \bar{1}2\bar{3}, 1\bar{2}3\},$$

$$B = \{\bar{1}\bar{2}\bar{3}, \bar{1}\bar{2}3, 1\bar{2}\bar{3}, 1\bar{2}3\},$$

$$C = \{\bar{1}\bar{2}\bar{3}, \bar{1}\bar{2}3, 1\bar{2}\bar{3}, 1\bar{2}3\},$$

$$D = \{\bar{1}\bar{2}\bar{3}, \bar{1}\bar{2}3, 1\bar{2}\bar{3}, 1\bar{2}3\}$$

所以有: $BC \subset A$, $BD \subset A$, $BC \cup BD = A$, $\bar{B}A = \Phi$ 。

例 4: 某人连续购买体育彩票, 令事件 A、B、C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖, 试用 A, B, C 及其运算表示下列事件:

(1) 第三次未中奖 $\bar{C}$

(2) 第三次才中奖 $\bar{A}\bar{B}C$

(3) 恰有一次中奖 $\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$

(4) 至少有一次中奖 $A \cup B \cup C$

事件的
构成

板书
简单推
导

PPT

PPT

(5) 不止一次中奖 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC = AB \cup AC \cup BC$

(6) 至多中奖二次 $\overline{ABC}$

第四部分：频率与概率的定义及其关系（20 分钟）

关于随机事件，在实际应用中更为有用的信息是希望知道在一次试验中某个事件发生的可能性的大小，并且希望用一个准确的数值来度量，因为单纯的定性表达远远不够。用定量的方法能够更准确的度量可能性。

定量表述的结果 → 引出了概率。

定义：（描述性定义）把表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数称为**概率**。

（一）频率 (Frequency)

为了进一步认识概率，先来看一下事件发生的频率的概念。

频数：设在相同条件下进行了 n 次试验，其中事件 A 发生的次数(记为 n_A)称为 A 发生的频数

频率：比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记做 $f_n(A)$ ，它是一个集合函数，自变量是集合。

这样定义后， $f_n(A)$ 显然有以下几个性质：

1° 值域： $0 \leq f_n(A) \leq 1$

2° 归一性： $f_n(S) = 1$

3° 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两互不相容的事件， $A_i A_j = \Phi$ 其中 $i \neq j$ ，则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k)$$

$$\begin{aligned} \text{证明：} \quad \text{右边} &= \frac{n_{A_1}}{n} + \frac{n_{A_2}}{n} + \dots + \frac{n_{A_k}}{n} \\ &= \frac{n_{A_1} + n_{A_2} + \dots + n_{A_k}}{n} = \text{左边} \end{aligned}$$

※ **注意：**频率是在有限次试验内的统计量。

频率的特点：

事件 A 发生的频繁程度越大，频率也越大，事件 A 在一次试验中出现的可能性也越大。

∴直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小。

是否可行？先来看几个例子

例 1： P_6 ，一枚硬币抛 5 次，50 次，500 次，这样的试验各做 10 遍，观察正面出现的

事件的
语言描
述到其
最简事
件关系
描述的
转换
古典概
率建模
基础

PPT

频率，该试验，历史上有人做过大量的试验。

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 m/n
德.摩尔根	2048	1061	0.5180
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维 尼	30000	14994	0.4998

(1) 频率有随机波动性，同样的 n 次试验，频率 $f_n(H)$ 并不同；

(2) 对于 $f_n(H)$ ： n 较小时波动很大， n 增大时趋于稳定， $f_n(H)$ 在 0.5 附近随机摆动并逐渐稳定于 0.5。

例 2：英文字母中特定字母出现的频率

观察到的字母的个数较小时(试验次数较小时)，频率有较大幅度的随机波动， n 增大时频率呈现稳定性。这种稳定性也与时代有关

表中统计了 438023 次，在古典密码学中可以用来破译一些简单的密码算法

以上特点可以总结如下：

(1) 试验次数 n 较小时， $f_n(A)$ 在 0 和 1 之间随机波动，波幅较大，没有参考价值

(2) n 增大时， $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数，对于每个事件 A 都有这样一个稳定的常数

上述的频率的稳定性，就是一种隐藏在随机现象中的统计规律性，并被人们长期的实践所证实。

思考：

用频率的稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的吗？

第五章将证明，大量试验所得频率得稳定值用来描述概率是合理的

$$f_n(A)|_{n \rightarrow \infty} = P(A)$$

稳定值如何得到？

- 1) 大量重复试验：精确的结果 抛硬币试验
- 2) 理论计算： 准确的结果 对试验环境准确掌握的情况下，古典概型
- 3) 间接预测： 准确性相对差一些，用于不能理论计算也不能大量试验时，比如：神七，探月工程飞船，某些产品

一些历史上的经典实验，抛硬币、投针试验

总之**频率稳定性常数和其性质**启发我们定义度量事件发生可能性大小的概率

PPT

(二) 概率(Probability)

公理化**定义**: 设 E 是随机试验, S 是 E 的样本空间, 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果**集合函数** $P(\bullet)$ 满足以下条件:

- 1) **非负性**: $\forall$ 事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- 2) **规范性**: 对于必然事件 S , 有 $P(S)=1$;
- 3) **可列可加性**: 设 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是**两两互不相容的事件**, 即对于 $i \neq j$, $A_i A_j = \Phi$, $i, j=1, 2, \dots$, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

相关说明:

对于有限的样本空间 S , 最多有 $2^{|S|}$ 个不同的事件, 在可列可加性中, **无穷多个事件**中大部分是 Φ 。由以上定义得出如下性质:

性质 i: 不可能事件的概率

$P(\Phi)=0$ (反之则不成立, 即 $P(A)=0$ 不能推导出 $A=\Phi$, 详见第 2 章)。

证明: 令 $A_n = \Phi$ ($n=1, 2, \dots$)

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Phi$, 并且对于 $i \neq j$, $A_i A_j = \Phi$, $i, j=1, 2, \dots$ 两两互不相容,

由可列可加性得

$$P(\Phi) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\Phi) = P(\Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\Phi)$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} P(\Phi) = 0,$$

而由定义, $P(\Phi) \geq 0$,

$\therefore$ 只有 $P(\Phi)=0$ 。

性质 ii: 有限可加性

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则有:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)。$$

证明: 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \Phi$,

则有对于 $i \neq j$, $A_i A_j = \Phi$, $i, j=1, 2, \dots$ 及 $\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k = \Phi$,

由可列可加性

板书

着重解释定义条件

PPT+ 板

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n P(A_k) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

性质 iii: 满足包含关系两事件的概率关系

设 A, B 是两个事件, 且 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

$$P(B) \geq P(A)$$

证明: (1) 构造法

由 $A \subset B$ 知, $B = A \cup (B-A)$, 且显然有 $A(B-A) = \emptyset$.

由有限可加性得 $P(B) = P(A \cup (B-A)) = P(A) + P(B-A)$,

$$\therefore P(B-A) = P(B) - P(A).$$

又由概率的性质知 $P(B-A) \geq 0$,

所以 $P(B) - P(A) \geq 0$, 即 $P(B) \geq P(A)$.

分析法

若 $P(B-A) = P(B) - P(A)$ 成立

则 $P(A) + P(B-A) = P(B)$, 由有限可加性, 左边

$P(A \cup (B-A)) = P(B)$, 而 $B = A \cup (B-A)$ 成立, 所以以上推导成立

性质 iv: 事件概率的上界

对于任意事件 A , $P(A) \leq 1$

证明: 由性质 iii, 及 $A \subset S$ 得 $P(A) \leq P(S) = 1$

性质 v: 逆事件的概率

对于任意事件 A , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

证明: $\bar{A} = S - A$

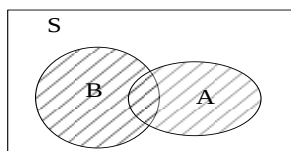
而 $A \subset S$

所以有 $P(\bar{A}) = P(S - A) = P(S) - P(A) = 1 - P(A)$,

或 $S = A \cup \bar{A}$, $A \bar{A} = \emptyset$, $P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

性质 vi: 加法公式

对于任意的两事件 A, B , 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



书

证明中
关键步
骤说明

PPT+ 板
书

PPT+ 板
书

PPT+ 板
书

	证明：由图知 $A \cup B = A \cup (B - AB)$，而 $A(B - AB) = \Phi$， 由有限可加性的 $P(A \cup B) = P(A \cup (B - AB)) = P(A) + P(B - AB)$， 又显然有 $AB \subset B$，由性质 iii $\text{右边} = P(A) + P(B) - P(AB)。$ 性质 vi：推广 若 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3)$ 一般的对于 n 个事件，$A_1, A_2, \dots, A_n$ 可用归纳法证得 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots$ $+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)。$	着重解释加法公式原理 画图说明其规律性
课后作业	P ₂₄₋₂₅ : 1, 2, 3, 5 ;	
课后小结	以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解： 1. 随机现象与随机实验的基本特点；样本空间、随机变量、总体 3 者之间的关系； 2. 事件之间的相互关系和运算，“事件发生”的含义； 3. 着重解释“频率是概率的稳定值”的意义，伯努利大数定律的初步解释； 4. 课后预习高中初等数学中关于排列组合方面的基础知识。	

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级_____

专业_____

撰写时间_____

教案编号	02-0102	教案内容	1.4 古典概型，1.5 条件概率（部分）	学时	2
教学目标	基本要求	(1) 掌握古典概型中概率的计算方法； (2) 掌握概率的性质并进行概率计算； (3) 理解条件概率的概念，会计算事件的条件概率；会利用概率的乘法公式计算事件概率；			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性；			
教学重点	古典概率数学建模与求解；条件概率性质与计算方法。				
教学难点	小概率事件的实际推断原理；用条件概率乘法定理展开多个积事件。				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备注
第一部分：新课内容概述(5 分钟) 上次课程学习了样本空间、随机事件的概念，以及事件的关系与运算规则，了解了概率的公理化体系及基本性质。再着重强调说明样本空间与事件发生的含义。 本节课程学习古典概型的建模与计算，首先介绍“古典概型”的基本定义。在概率论发展初期（面对机会游戏），主要研究具有如下两个特点的随机试验： (1) 试验的样本空间的元素只有有限多个； (2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同。 有以上特点的随机试验称为 古典概型 ，也称 等可能概型 。					板书， 回顾

第二部分：等可能概型（古典概型）（60 分钟）

先看两个试验：

E_1 : 抛一枚硬币，观察其 H, T 出现的情况； $S=\{H, T\}$

E_4 : 抛一枚骰子，观察其出现的点数； $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

PPT

（一）古典概型定义

上述试验有两个明显特点：

- 1) S 中的元素只有有限个
- 2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同

这样的试验大量存在，称为**等可能概型**，由于它是概率论发展初期的研究对象，又叫**古典概型**。

（二）古典概型试验中事件发生的概率计算公式

设试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，由于每个基本事件发生的可能性相同，即有：

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\dots=P(\{e_n\})。$$

又由于基本事件是两两不相容的

$$\text{所以 } 1=P(S)=P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\})=\sum_{i=1}^n P(\{e_i\})=nP(\{e_i\}), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

$$\text{即 } P(\{e_i\})=1/n, \quad i=1, 2, \dots, n$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \dots \cup \{e_{i_k}\}$ ， $i_1, i_2, \dots, i_k$ 是 1 到 n

中某 k 个不同的数，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^k P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A \text{ 中包含的基本事件数}}{S \text{ 中包含的基本事件数}}。$$

板书讲解

重点
计算公式分子一定要与分母 S 相一致

例 1.

一枚硬币抛三次

(i) 设事件 A_1 : 恰有一次出现正面，求 $P(A_1)$

(ii) 设事件 A_2 : 至少有一次出现正面，求 $P(A_2)$

解：首先正确给出样本空间

$S=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ 及

(i) 事件 $A_1=\{HTT, THT, TTH\}$

分析： S 中只有有限个元素，由对称性可知，每个基本事件发生的可能性相同——

等可能概型

$$\therefore P(A_1) = 3/8$$

(ii) 先看 A_2 的逆事件 $\overline{A_2} = \{TTT\}$

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 1/8 = 7/8$$

启示：1. 等可能概型的判断可根据对称性来考虑；

2. 对于“至少…”通常先考察其逆事件；

3. 当样本空间中元素较多时，不必一一列出，直接计算即可。

（三）排列与组合基础

乘法原理： 设完成一件事需分两步，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，则完成这件事共有 $n_1 n_2$ 种方法。

加法原理： 设完成一件事有两种途径，第一种途径有 n_1 种方法，第二种途径有 n_2 种方法，则完成这件事共有 $n_1 + n_2$ 种方法。

有重复排列： 从含有 n 个元素的集合中随机抽取 k 次，每次取一个，记录其结果后放回，将记录结果排成一行。

共有 n^k 种排列方式。

无重复排列： 从含有 n 个元素的集合中随机抽取 k 次，每次取一个，取后不放回，将所取元素排成一行。

共有 $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ 种排列方式。

组合： 从含有 n 个元素的集合中随机抽取 k 个(不放回抽样)。

$$\text{共有 } C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ 种取法。}$$

重复组合： 从含有 n 个元素的集合中随机抽取 k 个，每次取一个，记录其结果后放回(放回抽样)。

$$\text{共有 } C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \text{ 种取法。}$$

例 2：放回抽样与不放回抽样

一只口袋有 6 只球：4 只白的，2 只红的

从袋中取球两次，每次随机取一只，考虑两种取球方式：

(a) **放回抽样：** 第一次取一只球，观察颜色后放回袋中，搅匀后再取一只

(b) **不放回抽样：** 第一次取一只球不放回袋中，第二次从剩余球中再取一只

启发思考：至多、至少、不止、恰有等事件模型

提问，关于初等数学中排列组合知识点

分别就以上两种方式求：

- (1) 取到的两只球都是白球的概率；
- (2) 取到的两只球颜色相同的概率；
- (3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率。

解：(a)放回抽样的情况

启示：※恰当的利用事件间的关系可以简化求解

设事件 A：取到的两只都是白球

事件 B：取到的两只都是红球

事件 C：至少一白

则(i)相当于求 $P(A)$ ；(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ；(iii) $P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

所以只要求出事件 A 和事件 B 的概率就行了

分析：依次从袋中取两球，每一取法为一个基本事件

又样本空间中的元素有限，由对称性每个基本事件发生的可能性相同
等可能概型

①计算 S 中元素的个数：第一次 6 球，第二次 6 球，由组合的乘法原理，
共有 $6 \times 6 = 36$ 种

②A：两次都有 4 只白球可取，共有 $4 \times 4 = 16$ 种

③B：两次都有 2 只白球可取，共有 $2 \times 2 = 4$ 种

∴由古典概型公式： $P(A) = 16/36 = 4/9$

$$P(B) = 4/36 = 1/9$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 4/9 + 1/9 = 5/9$$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 1/9 = 8/9$$

※分数是否化为小数要视具体情况，不可随意化成小数，除非由具体说明或保留精度

(b)不放回抽样的情况

S: $6 \times 5 = 30$, A: $4 \times 3 = 12$, B: $2 \times 1 = 2$ 具体步骤（略）

例 3：生日悖论：将 n 只球随机放入 $N(N \geq n)$ 个盒子中去，求每个盒子至多有一只球的概率(设盒子容量不限)。

解：分析----- n 只球放入 N 个盒子中的每一种方法为一个基本事件

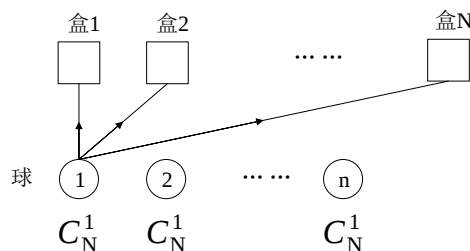
由对称性易知：古典概型

PPT

PPT

PPT

思路启发



PPT

S: 共有 N^n 种不同的放法

A: 至多放一只, 共有 $N \times (N-1) \times (N-2) \times \dots \times (N-n+1)$

所以 $P(A) = \frac{N \times (N-1) \times (N-2) \times \dots \times (N-n+1)}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}$ 。

推广: 设每人的生日在一年 365 天中任一天是等可能的, 任选 n 个人 ($n \leq 365$), 生日各不相同的概率: 由公式

概率 = $\frac{A_{365}^n}{365^n}$

则 n 个人中至少有两人生日相同的概率 $p = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$ 。

当 $n=23$ 时, $p=0.507$;

当 $n=64$ 时, $p=0.997$, 几乎等于 1; 如 60 个人的班级以近乎于 1 的概率有两个人生日相同。

总结 I: 一般地, 把 n 个球随机地分配到 m 个盒子中去 ($n \leq m$), 则每盒至多有一球的概率是:

$$P = \frac{A_m^n}{m^n} = \frac{n! C_m^n}{m^n}。$$

更一般化的模型推广

例 4: 超几何分布的概率公式

设有 N 件产品, 其中 D 件次品, 今从中任取 n 件。

问: 其中恰有 k ($k \leq D$) 件次品的概率是多少?

解: S: N 件中任取 n 件 (不放回抽样, 也不计次序)

共有 C_N^n 种取法, 每一取法为一基本事件

注意: 符号 C_N^n 为组合数, N, n 均为整数,

当 N 为实数时记做 $\binom{N}{n}$

A: 恰有 k 件次品: 相当于在 D 件次品中任选 k 件, 并在 $N-D$ 件正品中任选 $n-k$ 件

共有 $C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}$ 件, 即 $P(A) = C_D^k \times C_{N-D}^{n-k} / C_N^n$ 。

总结 11: 一般地, 设盒中有 N 个球, 其中有 M 个白球, 从中任抽 n 个球, 在这类作“不放回抽样组合”的问题当中, n 个球中恰有 k 白球的概率是:

$$P = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}。$$

重点

例 5: 抽签问题

袋中有 a 只白球, b 只红球, k 个人依次在袋中取一只球, 分别采用放回抽样和不放回抽样的方式, 求第 i 个人取到白球的概率 ($k < a+b, i \leq k$), 记为 $P(B)$

解: (1) 放回抽样时

第 i 个人取球不受前 $i-1$ 个人的影响, 因此概率等于白球的个数比上球总数

$$\text{即 } P(B) = \frac{a}{a+b}。$$

PPT

(2) 不放回抽样的情况

第 i 个人取到白球的取法总数比上总取法数, 其中总取法数如下:

S: 总的取法, k 个人各取一只球, 每种取法为一个基本事件

共有 $(a+b)(a+b-1) \dots (a+b-k+1) = A_{a+b}^k$ 种取法。

事件 B 发生时, 第 i 个人应取到白球, 可以是 a 只中的任意一只, 共有 a 种情况, 对于每一种情况来说, 其余 $k-1$ 个人是从其余 $a+b-1$ 个球中任取 $k-1$ 只, 由于是不放回抽样, 共有 A_{a+b-1}^{k-1} 种,

启发观察样本空间的变化

所以事件 B 发生时可能的取法总数为 $a \times A_{a+b-1}^{k-1}$,

$$P(B) = a \times A_{a+b-1}^{k-1} / A_{a+b}^k = \frac{a}{a+b}。$$

可见概率与 i 无关, 即 k 个人每人取到白球的概率与取球的先后次序, 取球的方式(是否放回抽样)无关, 它们机会均等。

例 6: 分组问题 30 名学生中有 3 名运动员, 将这些学生平均分成 3 组, 求:

(1) 每组有一名运动员的概率;

(2) 3 名运动员集中在一个组的概率。

解: 设 $A = \{\text{每组有一名运动员}\}$; $B = \{3 \text{ 名运动员集中在一组}\}$ 。

30 名学生平均分配到 3 个班级的概率为:

$$N = C_{30}^{10} C_{20}^{10} C_{10}^{10} = \frac{30!}{10! 10! 10!}。$$

1. 每个组都有一名运动员分法有 3!种，再把 27 名学生平均分配到 3 个组当中，有：

$$P(A) = \frac{3! \frac{27!}{9! 9! 9!}}{N} = \frac{50}{203}。$$

2. 三名运动员到一个组分法有 3 种，再把其余 27 名学生分配到 3 个组当中(一个组 7 名，另两个班各 10 名)，有：

$$P(B) = \frac{3 \times C_{27}^7 C_{20}^{10} C_{10}^{10}}{N} = \frac{3! \frac{27!}{7! 10! 10!}}{N}。$$

简化步骤

总结 III：一般地，把 n 个球随机地分成 m 组($n > m$)，要求第 i 组恰有 n_i 个球 ($i=1, \dots, m$)，共有分法：

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_m!}。$$

PPT

例 7：一道作业题 从 5 双不同的鞋子中，任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

解：古典概型，为方便分析，先求 4 只都不配成双的概率 p 。

S：共有 C_{10}^4 种不同的取法

4 只都不配成双的概率：5 双鞋中先任选 4 双，然后每双鞋中任选一只

$$C_5^4 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1$$

$$\text{所以 } p = \frac{2^4 C_5^4}{C_{10}^4}$$

$$\text{所以至少两只配成双的概率为 } 1 - p = 1 - \frac{2^4 C_5^4}{C_{10}^4}。$$

Ppt

或直接求：

有 1 双配成双： $C_5^1 \times (C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^1)$ ；有两双配成双 C_5^2 ，

$$\text{所以 } P(B) = (C_5^1 \times (C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^1) + C_5^2) / C_{10}^4$$

例 8：小概率事件与实际推断原理

某接待站在某一周曾接待过 12 次来访，均是在周二和周四进行。

问：是否可以推断接待时间是有规定的？

解：假设接待事件没有规定，而来访者在一周内任一天去接待站是等可能的。

那么 12 个来访者分布于一周 7 天共有 7^{12} 种可能分布，

现在 12 个人均集中在周二和周四两天，共有 2^{12} 种可能情况，

因此在没有规定的情况下，12 个来访者均集中在周二和周四两天的概率为：

$2^{12}/7^{12}=0.0000003$, 千万分之三，近乎于不可能事件。

实际推断原理：根据实践经验，概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的

现在这种小概率事件竟然发生了，所以假设可能不正确，可以推断接待时间是有规定的，（如果 2 天改为 4 天， $4^{12}/7^{12}=0.0012$ ，则很难说是小概率事件）。

重点讲解该反证法思路，假设检验初步

第三部分：条件概率基础（25 分钟）

条件概率问题是概率论中，内容最为丰富的一个问题，主要考虑：**在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率**。通信系统中，出现接收信号错误，在接收系统正常情况下，由信道产生错误的概率。

（一）条件概率的定义

例 1：一枚硬币抛两次，观察其出现 H 和 T 的情况，

设事件 A：“至少有一次为 H”

事件 B：“两次抛出同一面”

求已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率。

解：试验本身是古典概型：

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$

$A=\{HH, HT, TH\}$

$B=\{HH, TT\}$

在条件概率下，相当于重新确定了样本空间！

$S'=S \cap A=A$.

$B'=B \cap A=AB=\{HH\}$.

记已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率为 $P(B|A)$ ，由古典概型计算方法

$$P(B|A) = \frac{AB \text{ 中的基本事件数}}{A \text{ 中的基本事件数}} = 1/3.$$

PPT

而在无条件的时候 $P(B)=2/4=1/2$ ，可见二者的不同

假设 AB 中的基本事件数为 k ， A 中的基本事件数为 $m(m>0)$ ， S 中的基本事件数为 n ，对于一般的古典概型问题，根据例 1 的分析显然有：

$$P(B|A)=\frac{k}{m},$$

分子分母同除以样本空间的大小 n 有：

$$P(B|A)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}.$$

而根据古典概型的计算公式： $P(BA)=\frac{k}{n}$ ， $P(A)=\frac{m}{n}$ ，带入上式有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ 其中 } P(A)=\frac{m}{n}>0.$$

在例 1 中： $P(BA)=1/4$ ， $P(A)=3/4$ ，所以 $P(B|A)=(1/4)/(3/4)=1/3$ ，同前。显然对于古典概型上式都成立。

定义：设 A ， B 是两事件，且 $P(A)>0$ ，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率。

它也符合概率定义三个条件：

- 1) 非负性： $\forall$ 事件 B ，有 $P(B|A)\geq 0$
- 2) 规范性：对于必然事件 S ，有 $P(S|A)=1$ ；
- 3) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$ ， $B_i B_j=\Phi$ ， $i, j=1, 2, \dots$ ，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

一般的概率性质都适合于条件概率，区别是必须加上条件，例如：

设 A ， B ， C 是三事件，

若 $B\subset C$ ，则有 $P(C-B)=P(C)-P(B)$ 。

同样的有 $P((C-B)|A)=P(C|A)-P(B|A)$ 。

又 $P(C\cup B)=P(C)+P(B)-P(CB)$ ，

则 $P(C\cup B|A)=P(C|A)+P(B|A)-P(CB|A)$ 。

板书

重点，
样本空间的重新定义

启发： S
增大还

一般的，求条件概率有两种思路：参见例 1

《一》用概率的含义，依据条件重新写出样本空间和事件子集。

《二》用条件概率的定义，若 $P(A)>0$ ，则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例 2：掷两颗骰子，已知点数之和为 7，求有一颗为 1 点的概率。

A：为条件：两颗骰子点数之和为 7

B：有一颗为 1 点。 求解 $P(B|A)$?

第1颗 \ 第2颗	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

S: 36 A: 6 B: 11 AB: 2

所以所求的条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2/36}{6/36} = 1/3$,

或由条件概率的含义直接有 $2/6=1/3$ 。

(二) 乘法定理

由条件概率的定义式变形立即可得如下定理：

乘法定理： 设 $P(A)>0$ ，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 。

以上是两个事件的积事件的展开。

推广到三个事件的情况： 设有 A,B,C 三个事件，且 $P(AB)>0$ ，于是：

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)。$$

注意： 如果 $P(AB)>0$ ，则必有 $P(A)>0$ 及 $P(B)>0$

同理： 可推广到更多个的情况

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件， $n \geq 2$ ，且 $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})>0$ ，则有

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 A_2 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

※ 乘法定理解决积事件的概率问题，可借助排列组合中的乘法定理来理解概率中的乘法定理。

是 缩
小？

PPT

PPT

结合板
书

※ **乘法定理解决的问题中：完成一项任务分多个步骤，将每个步骤在前面步骤完成的条件下其完成的概率相乘。**

重点说明积事件的乘法定理展开规律

例 3：袋中装有 r 只红球、 t 只白球，每次从袋中任取一只观察颜色后放回，再放入 a 只与所取球同色的球。若连续取球四次，求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率

解：设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别为每次取到红球的事件

取球时：**有次序，放回抽样，有添加**

则要求的概率是一个积事件的概率 $P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4)$

而**依据取球的顺序及有添加的情况**，按乘法公式从 A_1 开始展开

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(\bar{A}_3 | A_1 A_2)P(\bar{A}_4 | A_1 A_2 \bar{A}_3)$$

$$= \frac{r}{r+t} \times \frac{r+a}{r+t+a} \times \frac{t}{r+t+2a} \times \frac{t+a}{r+t+3a}$$

PPT

显然，按以上展开顺序，每一个条件概率均可容易求出

例 4：设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 $1/2$ ，若第一次落下未打破而第二次落下打破的概率为 $7/10$ ，若前两次落下未打破而第三次落下打破的概率为 $9/10$ ，试求透镜三次落下而未打破的概率。

解：首先分析一下所求的问题

设事件 A ：第一次落下打破；

事件 B ：第二次落下打破；

事件 C ：第三次落下打破。

则所求的概率为 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

题设条件为 $P(A)=1/2$ ， $P(B|\bar{A})=7/10$ ， $P(C|\bar{A}\bar{B})=9/10$

用乘法定理 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{C}|\bar{A}\bar{B})$

$$=(1-P(A))(1-P(B|\bar{A}))(1-P(C|\bar{A}\bar{B}))$$

$$=3/200$$

也可以先求 $\bar{B}=A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 由于这三次打破是两两互不相容的事件，因此

根据有限可加性 $P(\bar{B})=P(A_1)+P(\bar{A}_1 A_2)+P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)$ 进而由乘法定理展开可得结果。

课后作业	P_{25} : 5, 7, 8, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 23, 24, 其它要求
课后小结	以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解: 1. 几类典型古典概率问题的求解思路、适用性, 及其一般化推广; 2. 条件概率的定义与求解的方法; 着重理解条件概率下样本空间的重新定义; 3. 明晰“实际推断原理”的反证法思路; 4. 用乘法定理展开多个积事件的概率问题。

《概率论与数理统计》课程教案

主讲教师_____

所在单位_____

授课班级_____

专业_____

撰写时间_____

教案编号	03-0103	教案内容	1.5 条件概率（部分），1.6 事件的独立性	学时	2
教学目标	基本要求	（1）理解条件概率的概念，会计算事件的条件概率；会利用概率的乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式计算事件概率； （2）理解和判断事件的独立性，会用事件的独立性计算随机事件的概率。			
	能力要求	1. 培养能力要求： a) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中； b) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性； 2. 基于全概率公式和贝叶斯公式，分析数字通信系统关于接收信号判别的若干问题，尤其是利用贝叶斯公式解决“先验概率”与判决“后验概率”关系，及其差异性分析、后验概率的修正。			
教学重点	全概率及其逆公式的理解、建模与求解；事件独立性判别；系统可靠性分析。				
教学难点	理解先验概率与后验概率；事件独立性与不相容的辨析。				
教学方法	提问、讲授、启发、讨论				
工具仪器	多媒体教具、教材、教案、教学课件、考勤表、平时成绩登记表				
教学安排	考勤、复习相关知识点、新课内容概述、组织教学、布置作业、课后小结				
教学过程	教学组织、具体教学内容及教学方法、手段、时间分配及其它说明				备 注
第一部分：新课内容概述(5 分钟) 上次课程学习了古典概率问题的基本建模与求解，再学习了基于条件概率定义的概率乘法公式。 本节首先学习两个重要的概率计算公式：全概率公式和贝叶斯公式；再引入事件独立性的概念；随后是第一章典型例题的讲解。 全概率应用：在许多实际问题当中，直接求得 $P(A)$ 并不容易，但却容易找到样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)$ 和 $P(A B_i)$ 很容易求得，则可根据全概率公式来求出 $P(A)$ 。 第二部分：全概率公式与贝叶斯公式（50 分钟） （一）. 全概率公式: 对应排列组合中的加法，完成一项任务有多种可能的并行情况，					板书， 回顾

这些情况的数目的和就是完成该任务的所有可能情况。

例 1: 已知男人中有 5% 是色盲患者, 女人中有 0.25% 是色盲患者 (此例保留)

在男女人数相等的人群中, 随机挑选一人, 问是色盲的概率 $P(C)$ 是多少?

分析: 依题意, 设有 $2n$ 个人, n 个男人, n 个女人。

C: 挑选的 1 人是色盲.

A: 挑选的是男人.

B: 挑选的是女人.

$$\text{由等可能概型, } P(C) = \frac{\text{色盲人数}}{\text{总人数}} = \frac{n \times 5\% + n \times 0.25\%}{2n}$$

$$= 1/2 \times 5\% + 1/2 \times 0.25\%$$

$$= P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

并且 $AB = \emptyset$, $A \cup B = S$, 分别计算出挑选的是男人和女人的情况下是色盲的概率, 把两种情况下的概率相加得到总概率, 这种对样本空间适当分解的思想, 有利于解决稍微复杂一点的概率问题, 这就是全概率公式。

首先来学习一个重要的概念: **划分**

定义: 设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 E 的一组事件。若

$$(i) B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(ii) B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$$

则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分。

※每次试验, 事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 中有且仅有一个发生!

例 2: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 则划分正确的是

$$B_1 = \{1, 2, 3\} \quad B_2 = \{4, 5\} \quad B_3 = \{6\} \quad \checkmark$$

$$B_1 = \{1, 2, 3\} \quad B_2 = \{3, 4\} \quad B_3 = \{5, 6\} \quad \times$$

全概率公式: 设 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

$$\text{证: } P(A) = P(AS) = P(A(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n))$$

$$\text{由分配率} \quad = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n)$$

$$\text{而对任意的 } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ 有 } (AB_i)(AB_j) = AB_i B_j = \emptyset$$

$$\text{由有限可加性} \quad = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n).$$

PPT

板书讲解

重点:
全概率公式中
“因”
与“果”
的说明

又 $P(B_i) > 0$ ，由乘法定理上式展开得：

$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)。$$

全概率物理意义：全概率实际上是在一个样本空间全划分(基本事件集)下，所有划分事件发生的条件下，各个基本事件的发生概率及其条件概率的加权求和过程！

在全概率公式中要注意以下几点：

- 1) 条件 $P(B_i) > 0$ ，划分不能是空集；
- 2) $B_1, B_2, \dots, B_n$ 正好覆盖 S 中的所有元素；
- 3) 在应用上，那些不便直接求某一事件的概率时，先找到一个合适的划分，再用全概率公式计算。

核心在于：先找到 S 恰当的一组划分！

例 3. 有 10 个袋子，各袋中装球的情况如下：

- (1) 2 个袋子中各装有 2 个白球与 4 个黑球；
- (2) 3 个袋子中各装有 3 个白球与 3 个黑球；
- (3) 5 个袋子中各装有 4 个白球与 2 个黑球；

任选一个袋子，从其中任取 2 个球，求取出的 2 个球都是白球的概率。

解： 设事件 A 表示取出的 2 个球都是白球，事件 B_i 表示所选袋子中装球的情况属于第 i 种 ($i=1, 2, 3$)，易知：

$$P(B_1) = \frac{2}{10}, P(B_2) = \frac{3}{10}, P(B_3) = \frac{5}{10}。$$

$$P(A|B_1) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, P(A|B_2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}, P(A|B_3) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}。$$

于是按全概率公式可得所求的概率：

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{15} + \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{15} = 0.273。$$

PPT

(二). 贝叶斯(Bayes)公式

事件 A 的发生当且仅当构成 S 的划分的事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 中的一个发生时才发生，那么如果事件 A 已经发生了，那么可能是事件 B_i 发生所导致的概率是多少呢？或者说如果事件 A 发生了，我们考察在此种情况下，由 B_i 发生导致 A 发生的条件概率如何计算呢。**这种问题我们称其为后验概率问题，有利于我们查找事件发生的原因。**解决此类问题可采用贝叶斯(Bayes)公式。

板书讲解
重点解释
先

贝叶斯 (Bayes) 公式:

设 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

称为贝叶斯公式。

证: 由条件概率公式 $P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}$ 再用乘法定理和全概率公式对分子分母展开即

得所求。(实际上是一个推论)

注意: 利用全概率公式和贝叶斯公式解决概率问题的关键, 首先在于能够寻找到一个样本空间的完整划分!

例 1: 在全概率公式中的例子中, 如果已知挑选的一人是色盲, 求该患者是男人的概率? C : 挑选的 1 人是色盲, A : 挑选的是男人, B : 挑选的是女人

$$\text{则所求为条件概率 } P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)} = 20/21$$

例 2: 对以往数据分析结果表明:

当机器调整良好时, 产品合格率为 98%

当机器发生某一故障时, 产品合格率为 55%

每天早上机器开动时, 调整良好的概率为 95%

试求: 已知某日早上第一件产品是合格产品时, 机器调整得良好的概率是多少?

解: 设事件 A : 产品合格

事件 B : 机器调整良好, $\bar{B}$ 为机器出现故障

由题意: $P(B) = 95\%$, $P(\bar{B}) = 5\%$

$$P(A|B) = 98\%, \quad P(A|\bar{B}) = 55\%$$

$$\text{求 } P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = 0.97$$

注意: $P(B) = 95\%$ 是以往的数据分析得到的, 称为**先验概率**。

$P(B|A) = 0.97$ 是得到信息 (第一件产品是合格品) 之后再重新加以修正的概率,

验、后
验。

PPT

PPT

思路启
发

叫做**后验概率**。通过后验概率可以进一步了解机器的情况。

例 3：无线电通讯发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“.”和“-”。由于干扰，发出信号“.”时，收报台以概率 0.98 收到信号“.”；发出信号“-”时，收报台以概率 0.99 收到信号“-”。求在收报台收到信号“-”的条件下，发报台发出信号“.”的概率。

解： 设 $B_1=\{\text{发出信号“.”}\}$, $B_2=\{\text{发出信号“-”}\}$,
 $A_1=\{\text{收到信号“.”}\}$, $A_2=\{\text{收到信号“-”}\}$.

根据题意可知： $P(A_1/B_1)=0.98$, $P(A_2/B_2)=0.99$.

由此还可知： $P(A_2/B_1)=0.02$, $P(A_1/B_2)=0.01$.

由于 $B_1B_2=\emptyset$, 可知 $B_1 \cup B_2=S$, 且 $A_2=A_2|B_1 \cup A_2|B_2$, 于是

$$\begin{aligned} P(B_1|A_2) &= \frac{P(A_2B_1)}{P(A_2)} = \frac{P(B_1)P(A_2|B_1)}{P(B_1)P(A_2|B_1)+P(B_2)P(A_2|B_2)} \\ &= \frac{0.6 \times 0.02}{0.6 \times 0.02 + 0.4 \times 0.99} = 0.029. \end{aligned}$$

本题中 $P(A_1/B_1)$ 和 $P(A_2/B_2)$ 是根据以往通信情况分析得到的，称为“先验概率”；而所求的 $P(B_1/A_2)$ 或 $P(B_2/A_1)$ 则为在收到信息之后重新加以修正的概率，称为“后验概率”。

结合数字通信中信号判决问题作一下展开。

第二部分：事件的独立性（20 分钟）

引言：前一节学习了条件概率，两事件 A, B, $P(A)>0$, 则 $P(B|A)$ 为条件概率。

一般情况下，事件 A 的发生对事件 B 的发生是有影响的，即

在很多情况下 $P(B|A) \neq P(B)$ 。

在有些情况下，这种影响是不存在的：

即 $P(B|A)=P(B)$ 。

这时 $P(AB)=P(B|A)P(A)=P(B)P(A)$ 。这样的情况用独立性这一概念来描述。

PPT

（一）独立性的定义与判别

定义 设 A, B 是两事件，如果具有等式：

$$P(AB)=P(B)P(A).$$

则称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立。

例 1： 设试验 E 为“抛甲乙两枚硬币，观察正反面出现的情况”

设事件 A：甲币出现正面

事件 B：乙币出现正面

看一下独立性。

分析: $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

$$A=\{HH, HT\} \quad B=\{HH, TH\}$$

$$\therefore P(A)=1/2 \quad P(B)=1/2 \quad P(AB)=1/4 \quad P(B|A)=1/2$$

$$\therefore P(B)=P(B|A) \quad P(AB)=P(B)P(A)$$

事实上, 由对称性知, 两次抛币是互不干涉的, 因此甲是否正面和乙是否正面互不影响。

性质: 若 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 则 A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立。

分析: 因为如果互不相容则 $0=P(AB)$, 如果又满足相互独立则 $P(AB)=P(B)P(A)>0$ 。矛盾。

定理一 设 A, B 是两事件, 且 $P(A)>0$, 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A)=P(B)$, 反之亦然。(由定义可直接证得)

定理二 若事件 A, B 相互独立, 则下列各对事件也相互独立。

$$A \text{ 与 } \bar{B}, \bar{A} \text{ 与 } B, \bar{A} \text{ 与 } \bar{B}$$

$$\text{证: } A=A(B \cup \bar{B})=AB \cup A\bar{B}$$

$$\therefore P(A)=P(AB \cup A\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})$$

$$\therefore P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)P(A)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B})$$

$\therefore A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

$$\text{又 } P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A}|\bar{B})P(\bar{B})=(1-P(A|\bar{B}))P(\bar{B})=(1-P(A))P(\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$$

$\therefore \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

$$\text{同理 } P(\bar{A}B)=P(\bar{A}|B)P(B)=(1-P(A|B))P(B)=(1-P(A))P(B)=P(\bar{A})P(B)$$

$\therefore \bar{A}$ 与 B 也相互独立。

推广: 三个事件的情况

定义: 设 A, B, C 是三个事件, 如果满足等式

$$\left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \\ P(AC) &= P(A)P(C), \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C), \end{aligned} \right\}$$

重点:
不相容
和独立
性 辨
析。

PPT

则称事件 A, B, C 相互独立。

注意：仅满足前三个等式的三个事件称为两两相互独立！一组事件两两独立，并不能保证它们相互独立！

当然，如果事件 A, B, C 相互独立，则 $A, \bar{B}, C; A, B, \bar{C}; \dots; \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 也相互独立。

例 2. 设袋中有 4 个球，其中 1 个涂成白色，1 个涂成红色，1 个涂成黄色，1 个涂有白,红,黄三种颜色，今从袋中任取一球，设

$A = \{\text{取出的球涂有白色}\},$

$B = \{\text{取出的球涂有红色}\},$

$C = \{\text{取出的球涂有黄色}\},$

试验证事件 A, B, C 两两独立，但不相互独立。

验证：易知

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2, \quad P(AB)=P(BC)=P(CA)=1/4.$$

所以 $P(AB)=P(A)P(B),$

$$P(BC)=P(B)P(C),$$

$$P(CA)=P(C)P(A),$$

即事件 A, B, C 两两独立。

但是 $P(ABC)=1/4 \neq P(A)P(B)P(C)=1/8;$

$$P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C).$$

故 A, B, C 不相互独立。

推广到多个事件：

一般的，设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件， $n \geq 2$ ，如果对于其中的任意两个，任意 3 个，...，任意 n 个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积，则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立。

包含的等式的个数：

$$C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = (1+1)^n - C_n^1 - C_n^0 = 2^n - n - 1$$

由定义可以得到以下两点推论：

1) 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立， $n \geq 2$ ，则其中任意 $k(2 \leq k \leq n)$ 个事件也是相互独立的。

2) 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n(n \geq 2)$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意多个事件换成他们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立。

在实际应用中，对于事件的独立性常常根据事件的实际意义来判断，如果两个

多个事件相互独立与两两独立辨析。

PPT

PPT

Ppt

事件关联很弱也可以看作是独立的。

例 3: 甲乙丙三人同时对飞机射击，且相互独立。

甲的击中概率为 0.4；乙的击中概率为 0.5；丙的击中概率为 0.7；

飞机被一人击中而击落的概率 0.2；

飞机被二人击中而击落的概率 0.6；

飞机被三人击中而击落的概率 1；

求飞机被击落的概率？

解: 由题意，令 B_1, B_2, B_3 分别为被一人击中、被两人击中、被三人击中的事件，则关于三人射击击中情况， B_1, B_2, B_3 构成样本空间的一个划分，事件 A 为飞机被击落的概率 $P(A)$ ，则由全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

现在 $P(A|B_1)=0.2$ ， $P(A|B_2)=0.6$ ， $P(A|B_3)=1$ ，只需求 $P(B_1)$ ， $P(B_2)$ ， $P(B_3)$

$$B_1 = (\bar{A} \bar{B} \bar{C}) \cup (\bar{A} B \bar{C}) \cup (\bar{A} \bar{B} C)$$

甲乙丙射击是相互独立的，所以

$$P(B_1) = P((\bar{A} \bar{B} \bar{C}) \cup (\bar{A} B \bar{C}) \cup (\bar{A} \bar{B} C))$$

$$= P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$$

同理可求得 $P(B_2)$ ， $P(B_3)$ 。

重点讲解该 S 划分的确定

(二) 事件的独立性与系统可靠性判别

引言：独立性的作用在系统可靠性分析中体现得最为完美，假设某系统由若干个元件联结而成，而每个元件可能正常工作，也可能失效。我们称元件能正常工作的概率为该元件的可靠性，而系统的可靠性是该系统能正常工作的概率。

数学模型：

下面均假设各个元件是否能正常工作是相互独立的，记

$$A_i = \{\text{第 } i \text{ 个元件能正常工作}\}, \quad P(A_i) = p_i, \quad i=1,2,\dots,n.$$

由假设可知事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立。

(1) 串联系统的可靠性：

由 n 个元件串联而成系统，只要有一个元件失效，该系统就失效。因此串联系统的可靠性为：

$$P_{\text{串}} = P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n) = p_1 p_2 \dots p_n.$$

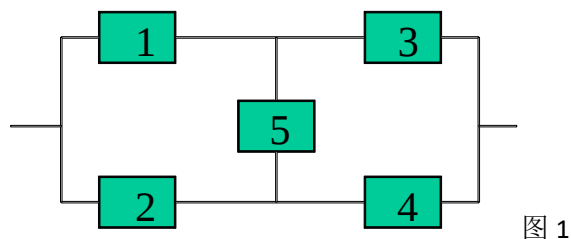
(2) 并联系统的可靠性：

PPT

由 n 个元件并联而成的系统，只要有一个元件正常工作，则该系统就不会失效。
因此并联系统可靠性为：

$$p_{\text{并}} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n).$$

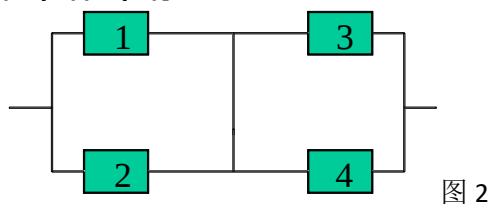
例 1： 设由 5 个元件组成的系统如图 1 所示，元件的可靠性分别为 $p_1, p_2, \dots, p_5$ ，求该系统的可靠性并作分析。



解：记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个元件正常工作}\}$ ，
 $i=1, 2, \dots, 5$ 。

(1) 若元件 5 正常工作，则系统变为如图 2，它的可靠性为：

$$[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] [1 - (1 - p_3)(1 - p_4)]$$

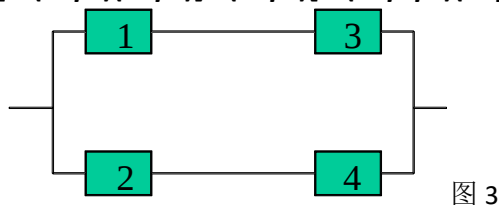


(2) 若元件 5 失效，则系统变为如图 3
它的可靠性为：

$$1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4)$$

由全概率公式，原系统可靠性为：

$$p_5 [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] [1 - (1 - p_3)(1 - p_4)] + (1 - p_5) [1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4)].$$



拓扑分
解

PPT

第三部分：典型习题讲解（15 分钟）

例 1：习题 38

袋中装有 m 只正品硬币， n 只次品硬币，次品硬币系指两面均印有国徽。在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽，问这只硬币是正品的概率是多

少?

解: 由题述这是典型的采用贝叶斯公式的题目

设: 事件 A : 取到的是正品

事件 $\bar{A}$: 取到的是次品

B 为 r 次投掷得到国徽

求 $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$P(A) = \frac{m}{m+n}, \quad P(\bar{A}) = \frac{n}{m+n}, \quad P(B|\bar{A}) = 1, \quad P(B|A) = (1/2)^r$$

$$\text{带入得 } P(A|B) = \frac{m}{m+n2^r}.$$

例 2: N 个人排成一队, 其中已知甲在乙前面, 问甲乙相邻的概率

解: 甲不能排在对尾, 乙在甲后面的位置上任选一个, 其余的人任意排, 相当于 N 个位置上先排甲乙, 顺序固定, 共计有 $C_N^2 \times (N-2)!$ 种排法甲乙相邻的排法:

甲乙相邻, 顺序固定, 则 $C_{N-1}^1 \times (N-2)!$

所以所求概率为 $2/N$ 。

例 3: 盒中有 N 只从 1 到 N 进行编号的球, 现在有放回的取回 n 只球, 问这 n 次取球的号码按升序排列的概率是多少? $n \leq N$

考虑两种情况(i) 严格升序, (ii)非严格升序

解: (i) 严格升序

总计有 N^n 种取法, 严格升序时 n 只球编号各不相同, 任取 n 只编号不同的球对应一种严格升序的序列, 所以共有 C_N^n 种,

所以所求概率为 $p = C_N^n / N^n$

(ii)非严格升序

总取法同(i)共计有 N^n 种取法

非严格升序时, n 只球可重复

按升序的含义, 重复的球是连续出现的, 从 1 到 N 这 N 个球按升序排放后, 每取一个球在该球后面放一个标记, 如果是重复 t 次选取就在该球后放 t 个标记, 这样相当于在 1 后面共插入 n 个标记。

PPT

PPT

PPT

这样相当于在 $N-1$ 个球 + n 个标记的 $N-1+n$ 个位置上任意选 n 个位置作为标记，其余球按升序恰好填满其它位置，1 号球总是在第一个位置上

因此共有 C_{N-1+n}^n 种方法

所以所求概率为 $p = C_{N-1+n}^n / N^n$

作业中的问题：

$P(ABC)=0$ 不能推出 $P(AB)=0$

反之由于有 $ABC \subset AB$ ，根据包含关系由 $P(AB)=0 \Rightarrow P(ABC)=0$ 。

例 4：联欢会上发给每人 5 个游戏卡，某人若在一项游戏中中奖，则用自己余下的卡片领奖，试记录一个人参加游戏次数，并写出样本空间

解：可能的次数为 1,2,3,4,5，

样本空间是指该人参加游戏的所有可能：

0, X0, XX0, XXX0, XXXX0, XXXXX

注意这里全不中奖的情况。

例 5：设 A,B 为两个已知事件，事件 X 满足 $\overline{A \cup X} \cup \overline{X \cup \bar{A}} = B$ ，求 X

解：利用德·摩根率，左边 $= (A \cup X) \cap (X \cup \bar{A})$ ，

再利用分配率，左边 $= X \cap (A \cup \bar{A}) = X \cap S = X$ ，

所以 $X=B$ 。

例 6：甲乙两人下棋，甲胜率为 0.6，乙胜率为 0.4。设 A 为甲胜，B 为乙胜，则甲胜乙输的概率为 $P(A \bar{B}) = (D)$ 。

A. $=P(A)P(\bar{B})=0.6 \times 0.6$ B. $=P(A-AB)=0.6-0.6 \times 0.4$

C. $=P(A)-P(B)=0.6-0.4$ D. $=P(A)=0.6$

注意这里 $A = \bar{B}$ 。

例 7：甲乙丙丁 4 人受聘为学校运动会工作人员，已知工作人员分 3 组，假设每人被分到每个组的可能性相等， A_k 为 4 人中最多有 k 个人分在同一组。试求

(1) $P(A_k)$, $k=2,3,4$; (2) 4 人都不在第一组的概率; (3) 4 人都不在同一组的概率; (4) 4 人不都在第 3 组的概率。

解：分组的总数为 3^4 。

(1) $P(A_2) = C_4^2 \times A_3^3 / 3^4$ = 即 4 人中任选 2 人捆绑一起后再全排列

$P(A_3) = C_4^3 \times A_3^2 / 3^4$ = 即 4 人中任选 3 人捆绑一起后再排列

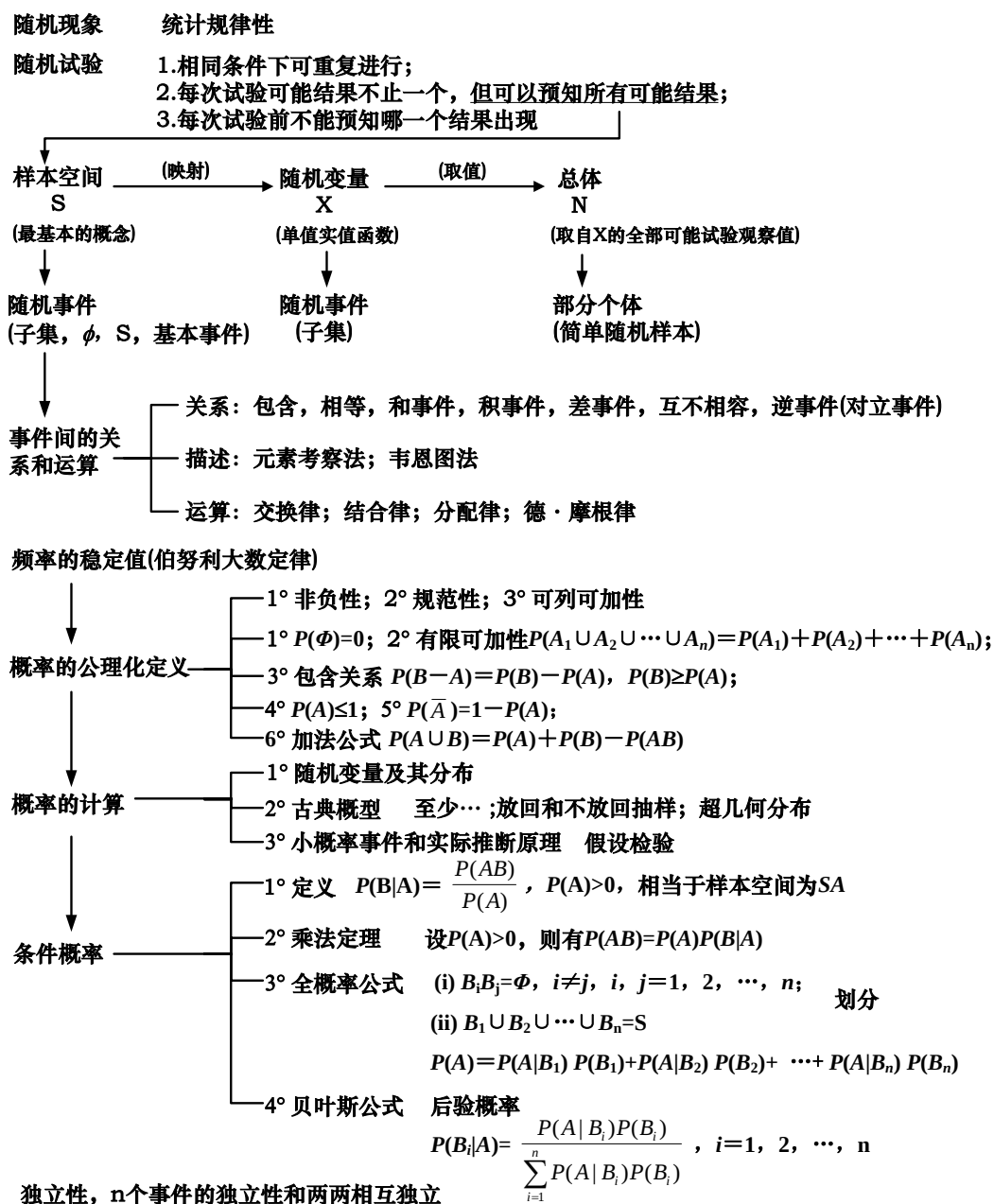
$P(A_4) = A_3^1 / 3^4$ = 即 4 人中任选 3 人捆绑一起后再排列

(2) 每人只有两种选择，所以 $p_2 = 2^4 / 3^4$

(3) $C_4^2 \times p_2$

(4) 1 减去 4 人都在第 3 组的概率 $1 - 1/3^4$ 。

第四部分：第一章内容串讲总结（10 分钟）



将第一章
章知识
点串接
起来

课后作业	P ₂₇₋₂₉ 27, 29, 30, 31, 35, 36, 37, 38, 39, 40
课后小结	以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解： 1. 利用全概率公式和贝叶斯公式解决概率问题的关键，首先在于能够寻找到一个样本空间的完整划分；全概率公式中“因”与“果”的形象解释； 2. 事件独立性与不相容的辨析； 3. 多个事件相互独立和事件两两独立差异性。