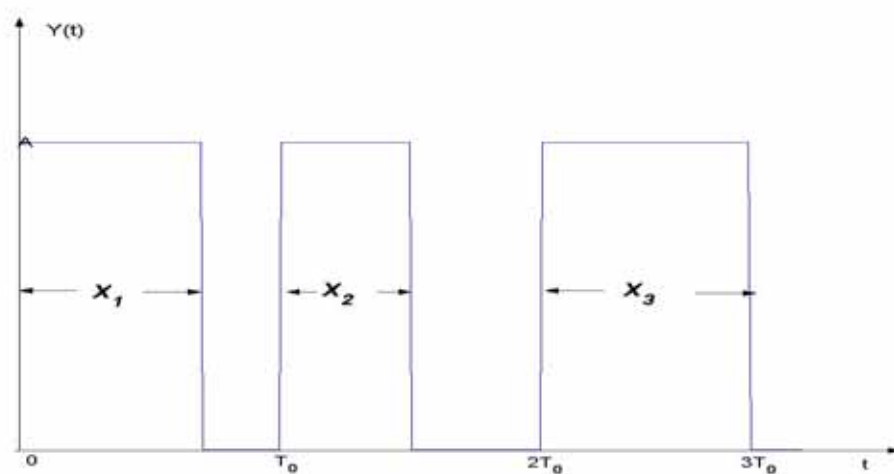


案例 1：脉宽调制信号的概率密度（一维概率密度函数）

背景：对于一通信系统，信号在信道中传输，人们希望认识信号在信道中的传输规律。通常信号用随机过程来描述，如 $\{Y(t), t > 0\}$ 。那么要清楚的描述此信号，我们需要知道过程 $Y(t)$ 的 n 维概率密度族，那么如何计算。为了简单，在一定的假设条件下，我们来计算 $Y(t)$ 的一维概率密度函数。

建模：设某简单通信系统以周期 T_0 在信道上传送一脉冲信号，记为 $Y(t), t > 0$ 。在每个周期内，脉冲信号的幅度为 A ，脉宽为在 $[0, T_0]$ 内均匀分布的随机变量 X 。在不同的周期内，脉宽随机变量是相互独立的。在以上模型下，计算该脉冲信号的一维概率密度函数。

分析：将第 i 个周期内的脉宽随机变量表示为 $X_i (i = 1, 2, \dots)$ ，则该随机过程的样本函数如下图所示：



脉冲调制信号的样本函数

随机过程 $Y(t)$ 在任意时刻 t 只能取值为 0 或 A 。只要计算出 $P\{Y(t) = A\}$ 和 $P\{Y(t) = 0\}$ ，则一维概率密度函数为

$$f_Y(y; t) = P\{Y(t) = A\} \delta(y - A) + P\{Y(t) = 0\} \delta(y)$$

先考虑第一个周期内的情形，也即 $0 \leq t < T_0$ 。此时，

$$P\{Y(t) = A\} = P\{X_1 > t\} = \int_t^{T_0} f_{X_1}(\tau) d\tau = \frac{T_0 - t}{T_0}$$

$$P\{Y(t) = 0\} = P\{X_1 < t\} = 1 - P\{Y(t) = A\} = \frac{t}{T_0}$$

由于在不同周期上脉宽随机变量的独立性，所以只要将第一个周期 $[0, T_0)$ 内的表达式周期延拓到其他周期上即可。当 $t \in [iT_0, (i+1)T_0), i = 0, 1, 2, \dots$ 时，

$$P\{Y(t) = A\} = \frac{(i+1)T_0 - t}{T_0}, \quad P\{Y(t) = 0\} = \frac{t - iT_0}{T_0}$$

从而知一维概率密度函数为

$$f_Y(y; t) = \frac{(i+1)T_0}{T_0} \delta(y - A) + \frac{t - iT_0}{T_0} \delta(y) \quad , \quad t \in [iT_0, (i+1)T_0)$$

结论：知道了信号的一维概率密度函数，就清楚了信号在某个时刻的变化规律，要知道更多的信号的信息，可以计算信号的多维概率密度函数，如二维概率密度函数。