

案例：正弦信号参数的估计（MLE）

背景：正弦信号是一种基本信号，十分广泛地应用于工农业生产和日常生活。另外，从信号分析的角度来看，任何变化规律复杂的信号都可以分解为按正弦规律变化的分量。因此，研究一个复杂信号激励下的电路响应，可以利用叠加定理分别研究每一个正弦分量激励下的电路响应，再叠加得到总的响应。故对正弦稳态电路的分析在电路分析中占有非常重要的地位。本质上，具有周期性的经济数据可能很自然地适合这样的模型；而在声纳和雷达中，物理机械所产生的观测信号也是正弦的。

建模：设接收到带有高斯噪声的正弦信号

$$X(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \phi) + w(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中 $A > 0$, $0 < f_0 < \frac{1}{2}$, ϕ 都为未知参数。利用最大似然估计方法估计这些参数。

分析求解：噪声的一维概率密度函数为： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} x^2\}$ ，则信号的 n 维概率密度函数为： $p(x, \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A \cos(2\pi f_0 n + \phi))^2]$ 。通过求下式的最小值可得参数的 MLE，

$$J(A, f_0, \phi) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A \cos(2\pi f_0 n + \phi))^2$$

即：

$$J(A, f_0, \phi) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A \cos \phi \cos 2\pi f_0 n + A \sin \phi \sin 2\pi f_0 n)^2$$

令

$$\alpha_1 = A \cos \phi$$

$$\alpha_2 = -A \sin \phi$$

则

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

再令

$$c = [1 \quad \cos 2\pi f_0 \quad \cdots \quad \cos 2\pi f_0 (N-1)]^T$$

$$s = [0 \quad \sin 2\pi f_0 \quad \cdots \quad \sin 2\pi f_0 (N-1)]^T$$

于是可得

$$\begin{aligned} J'(\alpha_1, \alpha_2, f_0) &= (x - \alpha_1 c - \alpha_2 s)^T (x - \alpha_1 c - \alpha_2 s) \\ &= (x - H\alpha)^T (x - H\alpha) \end{aligned}$$

其中 $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T, H = [c \ s]$ 。因此， α 的最小解为：

$$\hat{\alpha} = (H^T H)^{-1} H^T x$$

因此

$$\begin{aligned} J'(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, f_0) &= (x - H\hat{\alpha})^T (x - H\hat{\alpha}) \\ &= x^T (I - H(H^T H)^{-1} H^T) x \end{aligned}$$

可解得：

$$\hat{A} = \frac{2}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi \hat{f}_0 n) \right|$$

$$\hat{\phi} = \arctan \frac{-\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin 2\pi \hat{f}_0 n}{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos 2\pi \hat{f}_0 n}$$

结论：可以利用最大似然估计法对正弦信号的参数进行学习。