

基于全概率公式的几何概率问题*

王昭海^{1,2}

(1 陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062;

2 安康学院数学系, 陕西 安康 725000)

摘 要: 利用微积分知识把离散型全概率公式推广到连续型, 并给出在几何概率问题上的应用实例。

关键词: 连续; 概率; 几何概率; 推广; 应用

中图分类号: O211.2 文献标识码: A 文章编号: 1007-9793(2007)02-0006-02

有关几何概率的计算主要是利用定义直接来求, 然而在一些概率 (几何概型) 的计算中, 我们常常会遇到在计算 $P(B|\zeta=x)$ 远比直接求 $P(B)$ 来得容易, 本文利用微积分知识把离散型全概率公式推广到连续型, 给出计算几何概率问题的另一求法。

1 全概率公式的推广 (连续型全概率公式)

定理 1 (离散型全概率公式)^[1]: 设事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两互不相容的事件;

$$A_n = \Omega$$

则对事件 B , $P(B) = \sum P(B|A_n)P(A_n)$ (1)

在概率论中, 每一个涉及随机变量的公式总是分别有离散型与连续型两种形式。以随机变量的函数的数学期望公式为例。设随机变量 η 是随机变量 ζ 的函数: $\eta = f(\zeta)$ 。当 ζ 为离散型随机变量 (不妨为取整数值的) 时, η 的数学期望按下式计算:

$$E\eta = \sum_{\eta} f(\eta) \times P(\zeta = \eta) \quad (2)$$

当 ζ 为连续型随机变量时

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx \quad (3)$$

其中 $p(x)$ 为 ζ 的分布密度函数。对比 (2) 与 (3) 式, 易见积分号与和式相当, $p(x) dx$ 与 $P(\zeta =$

$\eta)$ 相当。概率论中这样成对的公式还很多, 按照这样对比的考虑, 把全概率公式 (1) 推广到连续型随机变量。

为此先定义一个离散型随机变量 ζ 如下:

$\zeta = n$, 当且仅当事件 A_n 发生,

即 A_n 与 $\{\zeta = n\}$ 是同一个事件。离散型随机变量 ζ 的分布列即为 $P(\zeta = n) = P(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$ 。全概率公式 (1) 可改写为

$$P(B) = \sum P(B|\zeta = n) P(\zeta = n) \quad (4)$$

按照上面的对比, 与离散型的全概率公式相当的应该是

定理 2 (连续型全概率公式): 设 ζ 为连续型随机变量, $p(x)$ 为 ζ 的分布密度函数, 则对事件 B 有

$$P(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(B|\zeta = x) p(x) dx \quad (5)$$

证明: 在数轴上取分点 $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, 则随变量落在 $x_i = (x_i, x_{i+1})$ 中的概率为 P

$$(\xi \in x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx, \quad x_i \text{ 同时也表示子区间}$$

长度, 当 x_i 较小时就有

$$P(\xi \in x_i) \approx P(x_i) \quad x_i, \text{ 并且这时分布列}$$

$$\begin{bmatrix} P(x_0) & x_0 & P(x_1) & x_1 & \dots & P(x_n) & x_n \\ P(x_0) & x_0 & P(x_1) & x_1 & \dots & P(x_n) & x \end{bmatrix}$$

视为 ξ 的一种近似分布由定理 1 知

* 收稿日期: 2006-09-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471083); 陕西师范大学重点科研基金资助项目 (995130)。

作者简介: 王昭海 (1966-), 男, 陕西省安康市人, 陕西师范大学数学与信息科学学院硕士研究生, 陕西安康学院数学系讲师, 从事高等数学和概率论与数理统计的教学及研究。

$P(B) \approx \sum_{i=1}^n P(B | \xi = x_i) P(x_i) \quad x_i$ 。再由微积分知识, 令 $x = \max x_i \rightarrow 0$ 得

$$P(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(B | \zeta = x) p(x) dx$$

2 利用连续型全概率公式解几何概率问题

[例 1] (Buffon 投针问题) 平面上画有间距为 $a(a > 0)$ 的等距平行线, 向平面任意投一长度为 $l(l < a)$ 的针, 求针与平行线相交的概率。

直接求解, 参见文献 [1]。这里利用连续型全概率公式求解法。

[解] 以 B 记事件“针与平行线相交”, 要求 $P(B)$, 设针与平行线的夹角为 ξ , 针的中心位置为 M , ξ 为 $[0, \pi]$ 上的均匀分布, 它的分布密度函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若 $\xi = x$ 取定时, 针的中心位置 M 只有在 AC 之间, 即 $M \in [-\frac{1}{2} \sin x, a - \frac{1}{2} \sin x]$ 时, 针与平行线不相交, 如图 1 所示。

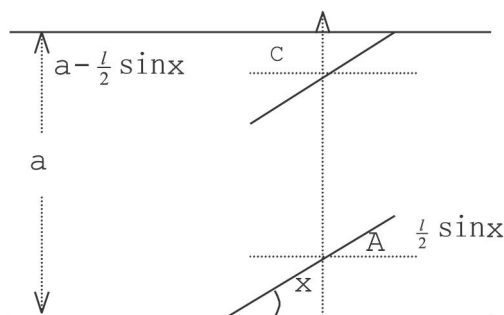


图 1 Buffon 问题概率分析图

Fig 1 Probability analysis plan of Buffon question

$$P = P(B | \xi = x) = \frac{(a - \frac{l}{2} \sin x) - \frac{l}{2} \sin x}{a} = \frac{a - l \sin x}{a}$$

$$\text{由逆概率公式得 } P(B | \xi = x) = 1 - \frac{a - l \sin x}{a} = \frac{l \sin x}{a}$$

$$P(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(B | \zeta = x) P(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{l \sin x}{a} \cdot \frac{1}{\pi} dx$$

$$\frac{1}{\pi} dx = \frac{2l}{a\pi}$$

[例 2] 设在 $\triangle ABC$ 内部任取一点 P , 在底边 BC 上任取一点 Q , 求直线 PQ 与 AB (或 AC) 相交的概率 (图 2)。

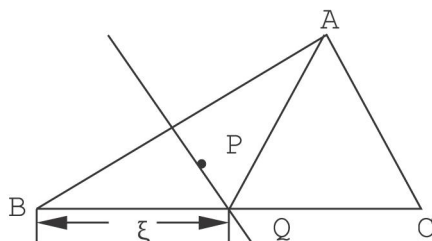


图 2 概率分析图

Fig 2 Probability analysis plan

[解] 以 E 记事件“ PQ 与 AB 相交”, 要求 $P(E)$ 。

设 BC 的长度为 1。令 BQ 的长度为 ξ , 则 ξ 为 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机变量, 即它的分布密度函数:

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

PQ 与 AB 相交相当于 P 点落在 ABQ 内。如果 $\zeta = x$ 已取定, $P(E | \zeta = x)$ 等于 ABQ 的面积与 ABC 的面积之比, 即相应的底边 BQ 与 BC 之比, 即 $P(E | \zeta = x) = x$

由定理 2 即得

$$P(E) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

所以 PQ 与 AC 相交的概率为 $\frac{1}{2}$

[例 3] 在圆周上任取两点 A, B 连成一弦, 再任取两点 C, D 也连成一弦, 求两弦 AB 与 CD 相交的概率 (图 3)。

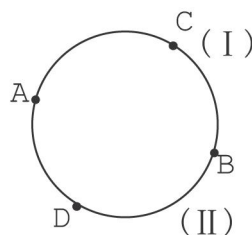


图 3 概率分析图

Fig 3 Probability analysis plan

(下转第 11 页)

[5] 唐 昊, 云 韵. 关于函数 $y = kx + \frac{m}{x}$ ($k \neq 0, m \neq 0$) 的图形是双曲线的探讨 [J]. 数学通报 2004, (9): 43 - 45

[6] 吴光磊, 丁石孙, 姜伯驹, 田畴等. 解析几何 (第二版). [M]. 北京: 人民教育出版社, 1962 5

The Ration Geometrical Characteristic of the Curvilinear Equation

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 1$$

Zhao Kui - qi

(school of Mathematics, Yunnan Nomal University, Kunming 650031, China)

Abstract: Here we obtain the complete ration geometrical characteristic of the curvilinear equation in plane by using translation and rotation of axes, therefore we can show the important parameter of the curve expressed as their idiographic equation conveniently.

Key word: curvilinear equation; ration; geometrical characteristic

(上接第 7 页)

[解] 以 E 记事件“AB 与 CD 相交”, 要求 P(E). 设 A 点无取定, 再取 B 点, 整个圆周分成两段弧 () 与 (). 以 ζ 记弧 () 的长度. 设圆周为 1, ζ 为 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机变量. 设 $\zeta = x$ 已取定, 则 AB 与 CD 相交于 C、D 两点分别落在不同的两段弧上. C 点落在弧 () 上的概率为 x , D 点落在弧 () 上的概率为 $1 - x$, 由于两点的取法独立, 因此 C 落在弧 () 上同时 D 落在弧 () 上的概率为 $x(1 - x)$. 同理, C 落在弧 () 上同时 D 落在弧 () 上的概率为 $x(1 - x)$, 所以

$$P(E|\zeta = x) = 2x(1 - x),$$

$$\text{由定理 2 得 } P(E) = \int_0^1 2x(1 - x) dx = 1/3.$$

由上述例子可以看到: 在计算 $P(B|\zeta = x)$ 远比直接求 $P(B)$ 来得容易时, 连续性全概率公式才显示出它的作用的。

参 考 文 献:

- [1] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997. 30 - 32
- [2] 王梓坤. 概率论基础及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1979. 20 - 22
- [3] 华东师大数理统计系. 概率论与数理统计教程习题解答 [M] (内部资料), 1985. 40 - 49
- [4] 周概容. 概率论与数理统计 [M]. 北京: 科学出版社, 1984. 32 - 34

According to all all rate formula of several why all rate problem

WANG Zhao - hai^{1,2}

(1, College of Mathematics and Information Science; Shaanxi Normal University; Xi'an; Shaanxi; 710062 China;

2, Department of Mathematics, Ankang College, Ankang, Shanxi, 725000, china)

ABSTRACT: In this article, the author spreads the whole probability from the scattered style to the continual style by using the knowledge of infinitesimal calculus and provides its applied example in resowing geometry probability problems

KEY WORDS: continual; probability; geometry probability; dissemination; application