

第二节 全排列和对换

主要内容

- 全排列

- 逆序数

- 对换

一、概念的引入

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解

	1	2	3	
百位	1	2	3	3种方法
十位	1 2	1 3		2种方法
个位	1 2 3			1种方法

共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种方法.

二、全排列及其逆序数

问题 把 n 个不同的元素排成一行，共有几种不同的排法？

定义 把 n 个不同的元素排成一行，叫做这 n 个元素的全排列（或排列）。

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示。

由引例 $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 。

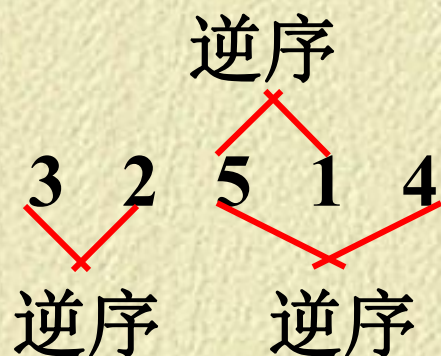
同理 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 。

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个标准次序, n 个不同的自然数, 规定由小到大为**标准次序**.

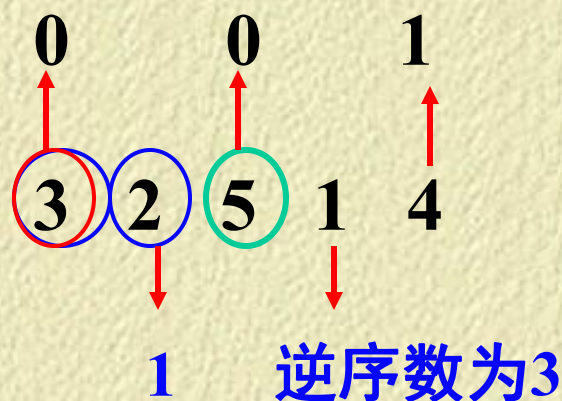
定义 在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中, 若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中,



定义 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

例如 排列32514 中,



故此排列的逆序数为 $2+1+2+0+0=5$.

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在 $1, 2, \dots, n-1, n$ 前面比它大的数码之和即分别算出 $1, 2, \dots, n-1, n$ 这 n 个元素的逆序数, 这个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数。

例1 求排列32514的逆序数。

解 在排列32514中，

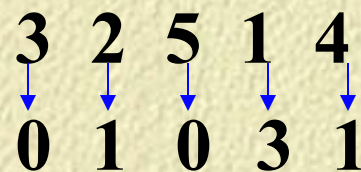
3排在首位，逆序数为0；

2的前面比2大的数只有一个3，故逆序数为1；

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;



于是排列32514的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} t &= 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 \\ &= 18 \end{aligned}$$

此排列为偶排列.

$$(2) \quad n(n-1)(n-2)\cdots 321$$

解

$$\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 321}^{n-1} \\ (n-2)$$

$$\begin{aligned} t &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

当 $n = 4k, 4k + 1$ 时为偶排列;

当 $n = 4k + 2, 4k + 3$ 时为奇排列.

$$(3) \quad (2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$$

解

$$\begin{array}{ccccccc}
 (2k) & 1 & (2k-1) & 2 & (2k-2) & 3 & (2k-3) \cdots (k+1) & k \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\
 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & & k
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 t &= 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k \\
 &= \frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2} + k = k^2,
 \end{aligned}$$

当 k 为偶数时, 排列为偶排列,

当 k 为奇数时, 排列为奇排列.

三、对换的定义

定义 在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换。

将相邻两个元素对调，叫做**相邻对换**。

例如

$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{a} \textcolor{blue}{b} b_1 \cdots b_m$



$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{b} \textcolor{blue}{a} b_1 \cdots b_m$

$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{a} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{b} c_1 \cdots c_n$



$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{b} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{a} c_1 \cdots c_n$

四、对换与排列的奇偶性的关系

定理1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明 设排列为

$$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ab} b_1 \cdots b_m \xrightarrow{\text{对换 } a \text{ 与 } b} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ba} b_1 \cdots b_m$$

除 a, b 外，其它元素的逆序数不改变.

当 $a < b$ 时,

经对换后 a 的逆序数增加1, b 的逆序数不变;

当 $a > b$ 时,

经对换后 a 的逆序数不变, b 的逆序数减少1.

因此对换相邻两个元素, 排列改变奇偶性.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$

现来对换 a 与 b .

$$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{a} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{b} c_1 \cdots c_n$$


m 次相邻对换

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ab} b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$


$m + 1$ 次相邻对换

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{b} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{a} c_1 \cdots c_n$$

$$\therefore a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ab} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{b} c_1 \cdots c_n,$$

$2m + 1$ 次相邻对换

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{bb} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{a} c_1 \cdots c_n,$$

所以一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

定理 在 n 阶排列中，偶排列和奇排列各占一半
即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

五、小结

- 1 n 个不同的元素的所有排列种数为 $n!$.
- 2 排列具有奇偶性.
- 3 计算排列逆序数常用的方法有2 种.
- 4 对换.