

第四节 矩阵分块法

- 一、矩阵的分块
- 二、分块矩阵的运算法则
- 三、小结 思考题

一、矩阵的分块

对于行数 and 列数较高的矩阵 A ，为了简化运算，经常采用**分块法**，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算。具体做法是：将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**。

例

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4), \text{ 其中 } A_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

二、分块矩阵的运算规则

(1) 设矩阵 A 与 B 的行数相同 , 列数相同 , 采用相同的分块法 , 有

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同 , 列数相同 , 那末

$$A + B = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11} + B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r} + B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ 为数, 那末

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

例 $\lambda = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$2A = \begin{pmatrix} 1 \times 2 & 2 \times 2 & 3 \times 2 \\ 3 \times 2 & 2 \times 2 & 1 \times 2 \\ 4 \times 2 & 5 \times 2 & 6 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

(3) 设 A 为 $m \times l$ 矩阵, B 为 $l \times n$ 矩阵, 分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{ij}$ 的行数, 那末

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r).$

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设 A 为 n 阶矩阵, 若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且非零子块都是方阵. 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 A_i ($i = 1, 2, \dots, s$) 都是方阵, 那末称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|.$$

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & A_2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix},$

若 $|A_i| \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$, 则 $|A| \neq 0$, 并有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & A_2^{-1} & \\ \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(7) \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s B_s \end{pmatrix}.$$

例1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

求 AB .

解

把 A, B 分块成

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $AB = \begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } A_1 B_{11} + B_{21} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_1 + B_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

例2 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A + B, \quad ABA.$

解 将 A, B 分块

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \text{其中}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \text{其中}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A + B = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 + B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore A + B = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 + B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}ABA &= \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 B_1 A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 B_2 A_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$A_1 B_1 A_1 = \begin{pmatrix} a^3 + a & 2a^2 + 1 \\ a^2 & a^3 + a \end{pmatrix},$$

$$A_2 B_2 A_2 = \begin{pmatrix} b^3 + 2b & 2b^2 + 1 \\ 3b^2 & b^3 + 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore ABA = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 A_1 & 0 \\ 0 & A_2 B_2 A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 + a & 2a^2 + 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a^3 + a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 + 2b & 2b^2 + 1 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3 + 2b \end{pmatrix}.$$

例3 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 $A = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_2 \end{pmatrix},$

$$A_1 = (5), \quad A_1^{-1} = \left(\frac{1}{5} \right); \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix};$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

三、小结

在矩阵理论的研究中,矩阵的分块是一种最基本,最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似

- (1) 加法 同型矩阵 ,采用相同的分块法
- (2) 数乘 数 k 乘矩阵 A ,需 k 乘 A 的每个子块
- (3) 乘法

若 A 与 B 相乘,需 A 的列的划分与 B 的划分相一致

(4) 转置

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \mathbf{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A_{s1}} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & \mathbf{A_{s1}^T} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A_{1r}^T} & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式与逆阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|.$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

A 可逆 $\Leftrightarrow A_i$ 可逆 $i = 1, 2, \dots, s$ 且

$$A^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1}).$$

思考题

设 $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 和 C 都是可逆方阵,

证明 A 可逆, 并求 A^{-1} .

思考题解答

证 由 B, C 可逆, 有 $|A| = |B||C| \neq 0$, 得 A 可逆.

设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} BX + DW = E, \\ BZ + DY = 0, \\ CW = 0, \\ CY = E. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = B^{-1}, \\ Y = C^{-1}, \\ Z = -B^{-1}DC^{-1}, \\ W = 0. \end{cases}$$

因此 $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$