

第三节 逆矩阵

- 一、概念的引入
- 二、逆矩阵的概念和性质
- 三、逆矩阵的求法
- 四、小结 思考题

一、概念的引入

在数的运算中,当数 $a \neq 0$ 时,有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为 a 的倒数,(或称 a 的逆);

在矩阵的运算中,单位阵 E 相当于数的乘法运算中的1,那么,对于矩阵 A ,如果存在一个矩阵 A^{-1} ,使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵 A^{-1} 称为 A 的可逆矩阵或逆阵.

解一元线性方程 $ax = b$, 当 $a \neq 0$ 时

存在一个数 a^{-1} , 使 $x = a^{-1}b$ 为方程的解

那么在解矩阵方程 $Ax = b$ 时, 是否也存在一个矩阵, 使 x 等于这个矩阵左乘 b

	数（一阶方阵）	n 阶方阵
事实	$1a=al=a$ ，任意的 a	$EA=AE=A$ ，任意的 A
	$a \neq 0 \Leftrightarrow$ 存在 b ，使得 $ab=ba=1$	A 满足？ $\Leftrightarrow$ 存在 B 使得 $AB=BA=E$
应用	$ba=1$ ， $ax=c \Rightarrow$ $x=1x=box=bc$	$BA=E$ ， $AX=C \Rightarrow$ $X=EX=BAX$
	$ab=1$ ， $xa=c \Rightarrow$ $x=x1=xab=cb$	$AB=E$ ， $XA=C \Rightarrow$ $X=XE=XAB=CB$

二、逆矩阵的概念和性质

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果有一个 n 阶矩阵 B ，使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵 A 是**可逆**的，并把矩阵 B 称为 A 的**逆矩阵**。
 A 的逆矩阵记作 A^{-1} 。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,

$\because AB = BA = E$, $\therefore B$ 是 A 的一个逆矩阵。

说明 若 A 是可逆矩阵, 则 A 的逆矩阵是**唯一**的.

若设 B 和 C 是 A 的可逆矩阵, 则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

$$\text{可得 } B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$$

所以 A 的逆矩阵是唯一的, 即

$$B = C = A^{-1}.$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆阵.

解 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵, **利用待定系数法**

则
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1, \\ 2b + d = 0, \\ -a = 0, \\ -b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 2. \end{cases}$$

又因为

AB

BA

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AB = BA = E$$

问题: (1) 什么条件下 A 才可逆?

(2) 如果可逆, 如何求 A^{-1} ?

若 A 可逆, $AB = E$, 两边取行列式,

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |E| = 1, \Rightarrow |A| \neq 0.$$

若 $|A| \neq 0$, 则称 A 是**非奇异的**(或**非退化的**);

否则称 A 为**奇异的**(或**退化的**).

$|A| \neq 0$ 是 A 可逆的必要条件.

下面重点考虑如何求一个可逆矩阵的逆矩阵

以下面的例题为例进行分析

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\text{或 } D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

下面重点考虑如何求一个可逆矩阵的逆矩阵

以下面的例题为例进行分析

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\text{或 } D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

要求1：写出矩阵A的代数余子式

定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

要求2：请计算矩阵A与其伴随矩阵的乘积；
请计算矩阵A的伴随矩阵与矩阵A的乘积；

发现结论： $AA^* = A^*A = |A|E.$

定理1 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵.

证明 若 A 可逆, 即有 A^{-1} 使 $AA^{-1} = E$.

故 $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$.

当 $|A| \neq 0$ 时,

当 $|A| \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

上页

下页

返回

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} A = E,$$

按逆矩阵的定义得

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

证毕

奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当 $|A| = 0$ 时, A 称为奇异矩阵,当 $|A| \neq 0$ 时, A 称为非奇异矩阵.

由此可得 A 是可逆阵的充要条件是 A 为非奇异矩阵.

推论 若 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 $B = A^{-1}$.

上页

下页

返回

知识回顾

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果有一个 n 阶矩阵 B ，使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵 A 是**可逆**的，并把矩阵 B 称为 A 的**逆矩阵**。

定理1 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ ，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

逆矩阵的运算性质

(1) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 亦可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 若 A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

(3) 若 A, B 为同阶方阵且均可逆, 则 AB 亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

证明

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

(4) 若 A 可逆, 则 A^T 亦可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证明 $\because A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = E^T = E,$

$$\therefore (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

另外, 当 $|A| \neq 0$ 时, 定义

$$A^0 = E, \quad A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

(k 为正整数)

当 $|A| \neq 0$, λ, μ 为整数时, 有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}.$$

(5) 若 A 可逆, 则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

证明 $\because AA^{-1} = E$

$$\therefore |A||A^{-1}| = 1$$

$$\text{因此 } |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

练习

1. 设 A 为 2 阶矩阵, 若 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ 中的 $a =$ _____.

-5

2. 设 A 为三阶矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|(2A)^{-1} - 5A^*| =$ _____.

-16

练习

3. 设 A, B 是 n 阶方阵, $|A|=2$, $|B|=-4$, 则 $|2B^*A^{-1}|=(\quad)$

$$(-8)^{n-1}$$

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & x \\ 3 & 10 & y & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件是()

$$x \neq 1 \text{ 且 } y \neq 2$$

三、逆矩阵的求法

例1 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad \therefore A^{-1} \text{存在.}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

同理可得 $A_{13} = 2, A_{21} = 6, A_{22} = -6, A_{23} = 2,$
 $A_{31} = -4, A_{32} = 5, A_{33} = -2,$

得 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

例2 下列矩阵 A, B 是否可逆? 若可逆, 求出其逆矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -11 \end{pmatrix}.$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ 所以 } A \text{ 可逆.}$$

$$\therefore A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

同理可求得 $A_{21} = 3, A_{22} = 0, A_{23} = -1, A_{31} = 1,$
 $A_{32} = 4, A_{33} = -3.$

$$\therefore A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于 $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -11 \end{vmatrix} = 0$, 故 B 不可逆.

例3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$

求矩阵 X 使满足 $AXB = C$.

解 $\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$

$\therefore A^{-1}, B^{-1}$ 都存在.

$$\text{且 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{又由 } AXB = C &\Rightarrow \underbrace{A^{-1}AXBB^{-1}}_E = A^{-1}CB^{-1} \\ &\Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

例4 设方阵 A 满足方程 $A^2 - A - 2E = 0$, 证明:
 $A, A + 2E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明 由 $A^2 - A - 2E = 0$,

$$\text{得 } A(A - E) = 2E \Rightarrow A \frac{A - E}{2} = E$$

$$\Rightarrow |A| \left| \frac{A - E}{2} \right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆.}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E).$$

$$\text{又由 } A^2 - A - 2E = 0$$

$$\Rightarrow (A + 2E)(A - 3E) + 4E = 0$$

$$\Rightarrow (A + 2E) \left[-\frac{1}{4}(A - 3E) \right] = E$$

$$\Rightarrow |A + 2E| \left| -\frac{1}{4}(A - 3E) \right| = 1, \quad \text{故 } A + 2E \text{ 可逆.}$$

$$\text{且 } (A + 2E)^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 3E) = \frac{3E - A}{4}.$$

待定系数法:

$$(A + 2E)(A + xE) = yE$$

例5 解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix};$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $\begin{matrix} \textcolor{teal}{\uparrow} E \\ \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

得
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \text{得 } X &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例6 设三阶矩阵 A, B 满足关系：

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 1/2 & \mathbf{0} & \\ & 1/4 & \\ \mathbf{0} & & 1/7 \end{pmatrix} \text{ 求 } B.$$

解 $A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow (A^{-1} - E)BA = 6A \Rightarrow (A^{-1} - E)B = 6E$$

$$\Rightarrow B = 6(A^{-1} - E)^{-1}.$$

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$$

$$= 6 \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例7 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1} .

解 因 $|A| = 5! \neq 0$, 故 A^{-1} 存在.

由伴随矩阵法得 $A^{-1} = A^* / |A|$,

$$= \frac{1}{5!} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

例8 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AP = PB$,

求 A^n

$$A = PBP^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{\left(PBP^{-1} \right) \left(PBP^{-1} \right) \cdots \left(PBP^{-1} \right)}_n$$

$$A^n = \underbrace{PBP^{-1} PBP^{-1} \cdots PBP^{-1}}_n = \underbrace{PB^n P^{-1}}_n$$

四、小结

逆矩阵的概念及运算性质.

逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

逆矩阵的计算方法

(1)待定系数法; (2)利用公式 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$;

(3)初等变换法(下一章介绍).

思考题

若 A 可逆,那么矩阵方程 $AX = B$ 是否有唯一解
 $X = A^{-1}B$? 矩阵方程 $YA = B$ 是否有唯一解
 $Y = BA^{-1}$?

思考题解答

答 是的. 这是由于 A^{-1} 的唯一性决定的 .