

《线性代数》模拟试卷（十七）答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是().

- A. $a = 1$ B. $a \geq 1$ C. $|a| < 1$ D. $|a| > 1$

答案: D.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 可交换的充分必要条件是().

- A. $x - y = 1$ B. $x = y$ C. $x - y = -1$ D. $x = 2y$

答案: C.

3. 设 A , B 为 n 阶可逆矩阵, O 为 n 阶零矩阵, 则 $\begin{vmatrix} A^T & O \\ O & B^{-1} \end{vmatrix} =$ ().

- A. $\frac{4^n |A|}{|B|}$ B. $\frac{(-2)^n |A|}{|B|}$ C. $4^n |A||B|$ D. $(-2)^n |A||B|$

答案: A.

4. 设齐次线性方程组 $Ax = 0$, 其中 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = n - 3$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 是方程组的三个线性无关的解向量, 则 $Ax = 0$ 的基础解系为().

- A. $\xi_1, \xi_1 + \xi_2$ B. $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
C. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$ D. $-\xi_3 - \xi_2 + \xi_1, \xi_3 + \xi_2 - \xi_1, -2\xi_3$

答案: B.

5. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, t, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, -4, 5, -2)^T$ 的秩为 2, $t =$ ().

- A. 2 B. 3 C. -3 D. -2

答案: B.

6. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 B 有特征值 1, 2, 3,

则 $x = (\quad)$.

A. -3

B. -4

C. 4

D. -2

答案: C.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 12 分)

1. 当 $k = \underline{\quad}$, $l = \underline{\quad}$ 时, 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}| (i, j = 1, 2, \dots, 5)$ 中前面冠以负号的项.

答案: 1; 5.

2. 已知 3 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 15$, $B = \frac{1}{3}A$, 则 $|B| = \underline{\quad}$.

答案: $\frac{5}{9}$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 $r(AB) = 2$, 则 $\lambda = \underline{\quad}$.

答案: 2.

4. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ a+1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 a 为 $\underline{\quad}$.

答案: -4.

三、计算题 (共 8 小题, 共 70 分)

1. 解矩阵方程 $A + 2X = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. (6 分)

解: 根据题意得: $X = \frac{1}{2}(B - A)$ (2 分)

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -7 & -2 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

2. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

解: $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分})$

$$= a \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \\ a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= a \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= a^4 \quad (7 \text{ 分})$$

3. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$, 求 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$ 的值. (8 分)

解: 因为 $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = 3. \quad (8 \text{ 分})$$

4. 当 a 为何值时, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 可逆, 并在可逆时, 求 A^{-1} . (8 分)

解: 因为 $|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 3$, 所以 $a \neq 1$ 时, A 可逆. (2 分)

$$\text{又 } A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2a, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3a-1 & -2a \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}, \text{ 且 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{3a-3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3a-1 & -2a \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}. \quad (8 \text{ 分})$$

5. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$, $\eta_2 + 2\eta_3 = (3, 4, 5, 6)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解. (8 分)

解: 已知方程组是 4 元, 且 $R(A) = 3$, $4 - 3 = 1$, 则由非齐次线性方程组解的结构知, 导出组的基础解系中仅含有一个向量, 设为 ξ (3 分)

$$\xi = 3\eta_1 - (\eta_2 + 2\eta_3) = 3(2, 3, 4, 5)^T - (3, 4, 5, 6)^T = (3, 5, 7, 9)^T \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{又因为非齐次线性方程组有特解 } \eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{则非齐次线性方程组 } Ax = \beta \text{ 的通解为 } x = \eta_1 + c\xi, \quad c \in \mathbf{R} \quad (8 \text{ 分})$$

$$6. \text{ 求矩阵 } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 的特征值与特征向量. } (9 \text{ 分})$$

$$\text{解: } A \text{ 的特征方程为 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

$$\text{所以 } A \text{ 的全部特征值为 } \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2 \quad (4 \text{ 分})$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程 $(E - A)x = 0$. 由

$$E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T$, 从而对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1$

(常数 $c_1 \neq 0$). (7 分)

当 $\lambda_3 = 2$ 时, 解方程 $(2E - A)x = 0$. 由

$$2E - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (0, 0, 1)^T$, 从而对应于特征值 $\lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $c_2\alpha_2$ (常数 $c_2 \neq 0$). (9 分)

7. 当 a, b 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases},$$
 (1) 有唯一解; (2)

无解; (3) 有无穷多解; 当方程有无穷多解时, 求出它的解. (12 分)

解: 因为 $(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & \vdots & b \\ 3 & 2 & 1 & a & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

(1) 当 $a \neq 1$ 时, 方程组有唯一解. (6 分)

(2) 当 $a = 1, b \neq -1$ 时, 方程组无解. (8 分)

(3) 当 $a = 1, b = -1$ 时, 方程组有无穷多解, 其解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases},$$

即 $\begin{cases} x_1 = -1 + c_1 + c_2 \\ x_2 = 1 - 2c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases},$ 其中 c_1, c_2 为任意常数. (12 分)

8. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 的秩和一个最大无关组,

并将其余向量用此最大无关组线性表示. (12 分)

解: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ (3 分)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

所以此向量组的秩为 2. (7 分)

α_1, α_2 为该向量组的一个最大无关组, 且 (9 分)

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{7}{2}\alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2. \quad (12 \text{ 分})$$