

○数学与生活○

生活中的小概率事件

孙立群 杨玉慧

(安徽省蚌埠第二中学, 233000)

一、生活中的小概率事件

概率论中把发生的概率很小(通常不超过 5%)的事件称做小概率事件. 一个事件如果发生的概率很小, 那么它在一次试验中几乎是不会发生的, 数学上称这个结论为小概率事件原理. 在现实生活中经常涉及到各种小概率事件. 请看下列实例.

一个零件, 正品率要达到 0.999, 意思是一万个零件中大约有一个次品, 即“万无一失”.

某省有参加 2004 年雅典奥运会圣火北京火炬接力赛的名额一个, 共有一万多人报名. 因此, 每人被选中的概率约为万分之一, 即“万里选一”.

某地的福利彩票, 十万户设一个特等奖, 奖金一百万. 因此, 中特等奖的概率是十万分之一.

我国 2003 年因交通事故而死亡的人数为十万余人. 以全国人口十四亿计算, 一年内因车祸死亡的概率约为十四万分之一.

从数学角度理解, 0.05 以下通常被认为是小概率. 但这不能一概而论, 要因人、因地和因事而异. 这正像人们通常所说“这蚂蚁真大”和“这老虎太小”一样, 是让蚂蚁和蚂蚁比, 老虎和老虎比.

比如, 一台设备有 1 000 个零件是常见的(如一架飞机). 假如每个零件的合格率是 0.999, 而且其中一个零件失效, 就会导致整个系统出现故障. 按照独立事件的概率计算方法, 整台设备正常工作的概率只有 $0.999^{1000} \approx 0.368$, 这意味着该设备只有三分之一的时间能够正常使用. 这样的产品怎能卖得出去吗? 发射宇宙飞船, 涉及的零部件其可靠性的要

求必须非常的严格. 0.000 1 的次品率已经很高, 不是小概率事件.

在生产中, 一批铅笔的废品率为 1%, 可以认为 1% 很小而准许出售; 但是, 若一批注射用的针药有 1% 不合要求, 使用后危害人的健康, 就不能准许这批针药出售.

二、新药是否有效

某地区羊患某种病的概率是 0.4, 且每只羊是否患病是彼此独立的. 今研制一种新的预防药, 任选 5 只羊做实验, 结果这 5 只羊服用此药后均未患病. 问此药是否有效?

初看起来, 会认为这药有效, 因为服药的羊均未患病. 但细想一下, 可能会有问题, 因为大部分羊不服药也不会患病, 患病的羊只占 40% 左右. 这 5 只羊都未患病, 未必是药的作用. 分析这个问题的一个自然想法是: 若药无效, 随机抽取 5 只羊都不患病的可能性大不大? 若这件事发生的概率很小, 几乎不会发生, 那么现在这几只羊都未患病, 应该是药的效果, 即药有效.

现假设药无效, 5 只羊都不生病的概率是 $(1 - 0.4)^5 \approx 0.078$. 这个概率很小, 该事件几乎不会发生, 但现在它确实发生了, 说明我们的假设不对, 药是有效的.

这里的分析思路有些像反证法, 但并不相同. 给定假设后, 人们发现一个概率很小几乎不会发生的事件却发生了, 从而否定先前的“假设”.

三、小概率事件偶有发生

小概率事件虽然在一次试验中几乎不会发生, 但在多次试验中, 时常也会发生. 设在一次试验中事件 A 出现的概率为 ε , 不管 ε 如何小, 如果把此试验不断独立的重复下去, 那

么事件 A 必然会出现 1 次,从而也必然会出现任意多次.这是因为,第一次试验中事件 A 不出现的概率为 $1 - \varepsilon$,前 n 次中事件 A 都不出现的概率为 $(1 - \varepsilon)^n$.因此,前 n 次试验中事件 A 至少出现一次的概率 $1 - (1 - \varepsilon)^n$,当 $n \rightarrow \infty$ 时,此概率趋向于 1.这表明事件 A 迟早出现一次的概率为 1.出现事件 A 以后,把下次试验当作第一次,重复上述推理,可见事件 A 必然再次出现.如此继续,可知事件 A 必然出现任意多次.

在城市闹区乱放鞭炮,就一次而论,引起火灾的可能性并不大,但如果很多人都这样乱放鞭炮,则事件“迟早会引起火灾”发生的可能性就很大.

在开号码锁时,虽然试开一次几乎不可能把锁打开,但试开很多次时,也有可能把锁打开.

俗话说“常在河边走,哪有不湿鞋”,也是基于上述的推理.

四、人们对出现“小概率事件”的态度

不同的人对出现“小概率事件”有不同的态度和反应是和包括人的心理因素在内的综合素质有关.

2003 年国内出现的 SARS 曾使许多人士出现过恐慌心理,不过当时恐慌也是非常合理的反应,因为恐慌可以提高个人和社会的预警水平,让人和社会能够花大力气去遏止“小概率事件”逐渐上升到“大概率事件”.

据报道,某人在自动取款机上取款时,发现帐户上多了一千万.他认为天下不会掉馅饼,这不是“小概率事件”,而是“不可能事件”.通过查询,发现是计算机千年虫导致了这种事件的发生.

有些人觉得自己肯定会中特等奖(十万分之一),却认为绝对不会因出车祸而死亡(十四万分之一).

五、小概率事件和不可能事件的分辨

小概率事件以其概率小,有时容易和不可能事件混淆.随着社会的发展和科学技术的进步,某些被认为是不可能事件可能成为小概率事件,而某些被认为是小概率事件可能成为不可能事件.

(1) 小概率事件转变为不可能事件

古希腊三大几何问题既引人入胜,又十分困难.问题的妙处在于它们从形式上看非常简单,而实际上却有着丰富的内涵.它们都要求作图只能使用圆规和无刻度的直尺,而且只能有限次地使用直尺和圆规.经过 2000 多年的艰苦探索,数学家终于弄清楚了这 3 个古典难题是“不可能用尺规完成的作图题”.认识到有些事情确实是不可能的是数学思想的一大飞跃.

(2) 不可能事件转变为小概率事件

奥运会比赛跳高项目的跳高方式大约经历了从跨越式(1876 年)→剪式(1887 年)→滚式(1895 年)→俯卧式(1941 年)→背越式(1968 年)的发展进程,运动员不断寻求更佳的跳高方式以作出突破.1941 年,美国选手 Les Steers 以俯卧式跳过 2.11 米.在当时,想以俯卧式跳过 2.20 米以上是不可能的.1968 年,美国运动员 Dick Fosbury 发明了背越式,并以 2.24 米的成绩打破了当时的奥运会记录.

(3) 两者的区别

小概率事件和不可能事件是有本质上的区别的.所谓小概率事件是指发生可能性较小(但有发生的机会)的事件,而不可能事件是指完全不可能发生,概率为零的事件.

某人某时刻既在甲地又在乙地,属于自相矛盾的事件,违反了逻辑,也就绝对不可能发生.

日本没有进行南京大屠杀是对历史上确实发生过事件的否定,也即对必然事件的否定,其概率自然为零.

永动机违反了热力学定律,常温常压下纯冰在零摄氏度以下自发融化违反了热力学第二定律,实质上也就违反了最基本的自然规律,是对必然事件的否定,因而发生的概率也为零.

因此,如何对待“小概率事件”是人们处理工作和生活问题的必备科学素养.不当的忽视“小概率事件”,会因麻痹大意,酿成恶性事故.但也不必过分害怕“小概率事件”,以致谨小慎微,裹步不前.事实上,你不必因担心天上的飞机会落在你的头上而忧心忡忡,

圆锥曲线在生活中的应用

霍二东

(江苏省东海高级中学, 222300)

数学来源于生活, 又应用于生活. 圆锥曲线是我们生活中常见的曲线, 如何利用圆锥曲线方程来解决生活中的实际问题, 本文举例以说明.

例 1 太平洋上有 A 、 B 两个岛屿, B 岛在 A 岛正东 400 海里处. 经多年观察研究发现, 某种鱼群洄游的路线基本上是一个椭圆, 其焦点恰好是 A 、 B 两岛. 曾有鱼船在距 A 岛正南 300 海里处发现过鱼群. 某日, 研究人员在 A 、 B 两岛同时用声纳探测仪发出不同频率的探测信号 (传播速度相同), A 、 B 两岛收到鱼群反射信号的时间比为 $\frac{5}{3}$, 你能否判断鱼群此时的位置?

解 由于鱼群洄游的路线基本上是一个椭圆, 且以 A 、 B 为焦点, 根据题意可以取 AB 所在直线为 x 轴, AB 中点为原点建立直角坐标系, 进而求出椭圆的方程为 $\frac{x^2}{160\,000} + \frac{y^2}{120\,000} = 1$. 设鱼群所在的点为 P , 则

$$\begin{cases} |PA| + |PB| = 800, \\ \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

解得 $|PA| = 500$ (海里), $|PB| = 300$ (海里), 知 $|PA|^2 = |PB|^2 + |AB|^2$, 所以 $PB \perp AB$. 进而求出 P 点坐标为 $(200, \pm 300)$, 即由此可判断鱼群在 B 岛正北或正南 300 海里处.

例 2 (2003 年上海市高考题) 如图 1, 某

隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状. 若最大拱高为 6 米, 则隧道设计的拱宽 L 是多少?

解 如图 1, 建立直角坐标系, 则点 $P(11, 4.5)$, 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 将 $b = h = 6$ 与点 P 的坐标代入椭圆方程, 得 $a = \frac{44\sqrt{7}}{7}$, 此时 $L = 2a = \frac{88\sqrt{7}}{7} \approx 33.3$. 因此隧道的拱宽约为 33.3 米.

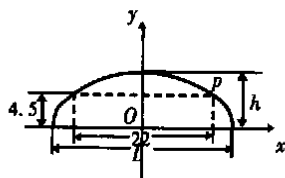


图 1

例 3 如图, 某工程要挖一个横断面为半圆的柱形的坑, 挖出的土只能沿道路 AP 、 BP 运到 P 处, $PA = 100$ 米, $PB = 150$ 米, $\angle APB = 60^\circ$, 试说明怎样运土能最省工.

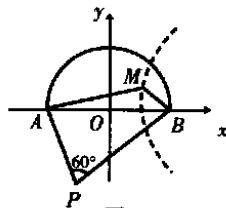


图 2

解 首先将此问题抽象为数学问题: 半圆中的点可以分为三类: (1) 沿 AP 到 P 较近; (2) 沿 BP 到 P 较近; (3) 沿 AP 、 BP 到 P 同样

但更不可因疏忽大意而使飞机的安全受到威胁. 只有对具体的“小概率事件”作具体分析,

科学地加以处理, 才能在“十拿九稳”、“万无一失”和“绝对把握”等等之间作出正确的抉择.